EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

december 08 nr 3

jaargang 84

Evaluatie compex-examens

Doorlopende leerlijnen, deel 2

SAGE-project

In memoriam Jan Sloff

Vanuit de oude doos, deel 3

Boekbesprekingen

Interview met Kees Buijs





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

decemeber
08
nr 3
jaargang 84

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Redactie

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom, Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 63 78
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 57,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 35,00
- studentleden: € 28,00
- gepensioneerden: € 35,00
- leden van de VVWL: € 35,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 55,00
Instituten en scholen: € 140,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie bv:
t.a.v. Annemieke Boere
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: a.boere@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Klaske Blom]

Bijna Kerstvakantie

De drukste en meest chaotische periode van het schooljaar zit er weer op en met een nieuwe Euclides, waarin u hopelijk voldoende van uw gading vindt, kunt u straks van uw vakantie gaan genieten. Heeft u nog met uw klas chocoladeletters gemaakt of iemand blij verrast met een ChocoPi? Leidde ons vorige nummer u nog naar Sinterklaas, het huidige nummer biedt een andere creatieve mogelijkheid. Mocht u uw kerstkaarten nog niet verstuurd hebben en nog op zoek zijn naar een origineel ontwerp, dan kan ik u de puzzelrubriek van Frits Göbel van harte aanbevelen. Huh? Ja echt, misschien kunt u met de vierpuntige ster als vlakvuller een prachtige kaart maken. Ik houd me aanbevolen.

Wiskundeonderwijs ter discussie

Er verschijnen de laatste tijd veel krantenartikelen gewijd aan het reken- en wiskundeonderwijs in Nederland. Bent u blij met deze stroom aan 'gratis' aandacht voor ons vak? Pas hoorde ik een collega verzuchten dat hij bijna weer heimwee kreeg naar de tijd dat hem op verjaardagsfeestjes gevraagd werd om puzzeltjes op te lossen. Tegenwoordig moet hij uitleggen dat zijn neefjes en nichtjes heus nog wel leren rekenen en ook in staat zijn om succesvol een vervolgstudie te doorlopen. De discussie over het rekenonderwijs wordt in vele gremia gevoerd en volgens mij is het goed als ook docenten in het voortgezet onderwijs op de hoogte blijven van de ontwikkelingen. Anne van Streun schreef in zijn serie over doorlopende leerlijnen al eerder over het rapport 'Over de drempels met rekenen'. In zijn bijdrage in dit nummer beschrijft hij de kansen voor de wiskundesectie die een verbeterslag wil aanbrengen in de opbrengst van het reken- en wiskundeonderwijs. Hij komt met concrete suggesties voor een aanpak van deze verbetering. De SLO heeft naar aanleiding van het rapport 'Over de drempels met taal en rekenen' een publicatie uitgebracht: 'Minimumdoelen Rekenen-wiskunde', waarin het fundamenteel niveau uit het rapport geconcretiseerd wordt. Wat moet een leerling beheersen om dit fundamentele niveau te bereiken? Welke stof kan de basisschoolleraar schrappen voor de zwakkere leerling? Geen onbelangrijke vragen. Laten wij ook kennis nemen van de antwoorden zodat we op de hoogte zijn van de diverse bagage waarmee leerlingen het voortgezet onderwijs binnenkomen. Het behoedt ons misschien voor verkeerde veronderstellingen en verwachtingen. Wat betreft de nieuwe programma's voor 2013 voor bovenbouw havo/vwo lijkt de discussie verstomd te zijn. Wanneer zullen de vernieuwingen worden vlotgetrokken en in welke richting? Marian Kollenveld noemt in haar bijdrage 'Kunt u het nog volgen?' een aantal oplossingen voor de huidige patstelling en legt uit dat nu het wachten is op het Salomonsoordeel van de HBO-raad en de VSNU. Ondertussen werken we gewoon door met de nieuwe programma's uit 2007. Heeft u wel de syllabi via uw examensecretaris of schoolleider in uw postvak gekregen? (Inmiddels zijn ook de syllabi voor vwo-examens van 2010 verschenen.) Waardevol, informatief materiaal waarmee we bij de voorbereiding op het CE ons voordeel kunnen doen.
En ook de laatste ontwikkeling zal u niet ontgaan zijn. Opeens was daar het voorstel van de staatssecretaris om de slagingsregeling voor havo/vwo aan te passen: leerlingen moeten voortaan twee van de drie vakken Nederlands, Engels en wiskunde voldoende halen op hun centraal examen. Ook hierover is Marian Kollenveld in de pen geklommen: een brief van haar aan de leden van de commissie Onderwijs van de Tweede Kamer kunt u lezen op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/page.php?id=7721*).

Blijven lezen

Laten we proberen op de hoogte te blijven van alles wat ons vak aangaat, en elkaar informeren en… blijven lezen. Ik hoop dat u inspiratie kunt opdoen uit de artikelen in Euclides. Lees hoe Julliette Karrer gemotiveerd raakte voor het maken van applets door mee te doen met het SAGE-project.
En lees hoe de compex-examens tot hun einde gekomen zijn, ondanks de positieve ervaringen van afgelopen schooljaar; Paul van de Molen schrijft erover. Joke Verbeek sprak met Kees Buijs; iemand die al voordat rekenen 'hot' was, besloot een proefschrift te schrijven over rekenstrategieën. En gelukkig is Ton Lecluse weer van de partij met een opgave uit zijn oude doos en vindt u ook het jaarlijkse verslag van Gert de Kleuver over de Vakantiecursus van het CWI. Erg leuk vind ik het dat we twee korte reacties hebben op eerder verschenen artikelen. Ik hoop dat ze u tot voorbeeld zijn, en dat u ook in de pen klimt als u wilt reageren. Tot slot wil ik nog uw aandacht vragen voor een aanbod van de NVORWO aan de leden van de NVvW om met korting het boekje 'Dyscalculie in discussie, deel 2', onder redactie van Mieke van Groenestijn en Jaap Vedder, aan te schaffen.
Ik wens u allen weer veel leesgenoegen en een fijne vakantie.

Inhoud

85 Kort vooraf [Klaske Blom]
86 Evaluatie compex-examens [Paul van der Molen]
88 Doorlopende Leerlijnen Rekenen en Wiskunde, deel 2 [Anne van Streun]
93 Opleiding Onderwijsassistent werkt hard aan… [Thomas van den Elsen]
95 Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen (interview met Kees Buijs) [Joke Verbeek]
97 'Dyscalculie in discussie, deel 2' is verschenen! [Jaap Vedder]
99 Eindelijk tijd voor iets extra's… [Juliette Karrer]
101 Correspondentie n.a.v. het artikel 'Alwéér die drie deuren?' [Rob Flohr, Jan van de Craats]
102 Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
103 In memoriam Jan Sloff [Anne van Streun]
104 Oproepen
105 Verschenen
106 Boekbespreking / Van vakgericht naar competentiegericht statistiekonderwijs [Arthur Bakker, Adrie Dierdorp]
108 Boekbespreking / Wiskunde in een notendop [Ger Limpens]
110 Vakantiecursus 2008 [Gert de Kleuver]
113 Aankondigingen
114 Kunt u het nog volgen?… [Marian Kollenveld]
118 Recreatie [Frits Göbel]
120 Servicepagina

Evaluatie compex-examens

VERSLAG VAN EEN BETROKKEN DISCUSSIE, GEVOERD DOOR DOCENTEN, LEERLINGEN, EXAMENMAKERS EN CEVO-MEDEWERKERS

[Paul van der Molen]

Inleiding

In 2003 startte een experiment waarbij op havo- en vwo-niveau voor enkele schoolvakken een examen aangeboden werd dat ten dele op de computer gemaakt moest worden: de zogenoemde compex-examens[1]. Ook de vwo wiskunde A1- en A12-examens hoorden hierbij. Vanaf 2006 werd het voor alle scholen mogelijk om zich voor de compex-examens in te schrijven. De CEVO vroeg aan Cito om in 2008 een evaluatie van deze examenvorm te organiseren. Om deze evaluatie handen en voeten te geven, werd een bijeenkomst georganiseerd waar een discussie zou kunnen plaats vinden tussen de diverse betrokken partijen: leerlingen, docenten, examenmakers en vakspecifieke medewerkers van de CEVO. Doel van de bijeenkomst was om ervaringen uit te wisselen en de verkregen inzichten te gebruiken voor het bepalen van de koers: Waar willen we naar toe met de inzet van de computer bij wiskunde-examens? In dit artikel wordt verslag gedaan van deze discussie. De bijeenkomst werd in juni 2008 gehouden bij Cito in Arnhem.

Algemeen

Om de discussie op voorhand structuur te geven, was aangegeven dat verschillende thema's aan de orde gesteld zouden worden. Begonnen werd met de manier van voorbereiding op het examen door docenten en leerlingen. Vervolgens werd een vergelijking gemaakt tussen de compex-opgaven en reguliere examenvragen, waarbij de centrale vraag was of de compex-opgaven een meerwaarde hadden of konden krijgen. Ten slotte werd een blik in de toekomst geworpen. Er werd gediscussieerd over de mogelijkheden en kansen enerzijds, en de nadelen en risico's anderzijds van de inzet van de computer bij wiskunde-examens. De discussies verliepen zeer levendig en gepassioneerd waarbij vooral de leerlingen, die zelf het compex-examen 2008 hadden gemaakt, nauw werden betrokken bij de inhoud van de discussie. De leerlingen wisten heel goed te verwoorden wat ze van de compex-examens vonden. Zij gaven op een open en eerlijke wijze antwoord op de vele vragen die de andere aanwezigen hen stelden. Ze probeerden daarbij heel duidelijk niet alleen hun eigen standpunt weer te geven maar ook, wanneer daar om gevraagd werd, een meer algemene visie van 'de leerling'.

De voorbereiding op het examen

De docenten gaven aan dat ongeveer vier tot vijf maanden voor het examen werd begonnen met het leren omgaan met Excel. In de compex-examens speelt Excel een belangrijke rol. Leerlingen dienen over een aantal basisvaardigheden Excel-gebruik te beschikken om de vragen te kunnen beantwoorden. In deze periode werden er wel veel oefenopgaven en oude examens gemaakt, maar desondanks bleef het gevoel bij de leerlingen dat het werken met Excel iets ongewoons had. Het werken met de GR was voor de leerlingen wel vertrouwd. Het ging zelfs zo ver dat de leerlingen soms met hun GR gingen narekenen of de uitkomst die Excel hen gaf, wel klopte. De leerlingen ervoeren de introductie van Excel als een extra last. Zij waren daarom in het begin niet gemotiveerd om naast het gewone programma ook nog de compex-opgaven te moeten maken.
Het gebruik van Excel en het leren van de vereiste vaardigheden werd niet erg moeilijk gevonden. Diverse A12-leerlingen hadden hierbij wel het voordeel dat zij bij M&O en bij economie ook met Excel moesten werken. Deze leerlingen waren al aardig handig geworden. Toch vonden ook deze leerlingen dat het gebruik van Excel iets ongewoons bleef. De routine ontbrak omdat het Excel-gebruik niet écht geïntegreerd was in het onderwijs. Dit had onder andere tot gevolg dat de leerlingen veel moeite hebben om te werken aan de oplossing en tegelijkertijd de gevolgde werkwijze op papier vast te leggen. De manier waarop leerlingen opschrijven wat ze gedaan hebben is zeer divers. Ze worden daarbij ook niet vaak genoeg bijgestuurd. Een leerling zou in de voorbereidingsfase ervaring moeten opdoen in het communiceren van de gevolgde werkwijze en de daarbij ondernomen denkstappen.
Het correctievoorschrift geeft wel mogelijkheden tot het geven van deelscores maar deze worden, mede omdat er onvoldoende is getraind onder examenomstandigheden, relatief weinig gegeven. Terwijl veel leerlingen bij het werken met de GR wel regelmatig hun tussenresultaten opschrijven, lijkt het er op dat ze dat bij de compex-vragen niet doen. Voor de wat betere leerling lijkt het niet zo'n groot probleem om op te schrijven hoe hij de oplossing heeft gekregen omdat die nog precies weet wat hij gedaan heeft, voor de zwakkere leerling vormt dit wel een probleem. Hierdoor missen deze leerlingen deelscorepunten.
Als eindadvies is duidelijk naar voren gekomen dat een noodzakelijke onderwijsvernieuwing, zoals bijvoorbeeld de invoering van Excel-gebruik in de wiskundeles, alleen slaagt als er een plaats voor is ingeruimd in het curriculum (en niet als een extra onderdeel wordt toegevoegd) en het een integraal onderdeel uitmaakt van de lessen en de boeken gedurende de laatste twee à drie jaar van het onderwijs.

Verschillen tussen reguliere wiskunde-opgaven en compex-opgaven

De leerlingen vonden de compex-opgaven vaak leuker en zinvoller om te maken dan de reguliere wiskundevragen. De leerlingen waren verrassend positief over

de inhoud van de compex-opgaven omdat deze opgaven als creatiever en realistischer ervaren werden. Dit maakte dat de attitude van de leerlingen ten opzichte van de compex-opgaven in de loop van de laatste maanden voor het examen wel veranderde. Men had het gevoel dat er bij de reguliere opgaven meer gevraagd werd naar ingeoefende trucjes terwijl je bij compex-opgaven meer (strategisch) na moest denken, en met puzzelen en gezond verstand een oplossing moest zoeken voor de aangeboden problemen. Dit sprak duidelijk meer tot de verbeelding en hierdoor ontstond een groeiende motivatie voor dit soort vraagstukken. Hierbij moet wel aangetekend worden dat vooral A1-leerlingen regelmatig gefrustreerd werden door de moeilijkheid van de vragen. Voor hen is het kennelijk toch erg lastig om het niveau van de geboden vragen te halen. Hiermee kan ten dele verklaard worden dat het verschil in prestaties tussen A1- en A12-leerlingen op compex-vragen groter is dan op reguliere vragen. Dit werd door de toetsdeskundige bevestigd. De compex-vragen hebben een grotere discriminerende werking, zo blijkt steevast uit de analyses na afloop van de examens. Zie daarvoor bijvoorbeeld het recente artikel in *Euclides* over de eerste tijdvakken wiskunde van 2008[2]. De creatieve vragen waarvan men vindt dat ze een meerwaarde hebben, worden door A1-leerlingen dus niet zo goed gemaakt. Om voor A1-leerlingen een passend compex-examen te maken, moeten de vragen relatief eenvoudig gehouden worden. Dit gaat ten koste van het gevoel van meerwaarde. In 2010 zou alleen voor dit type leerlingen (die dan wiskunde C doen) een examen gemaakt moeten worden. Naast andere redenen lijkt het ook vanuit de hierboven beschreven situatie daarom niet voor de hand liggend om in 2010 een compex-examen wiskunde C te maken (zie ook het nawoord met het CEVO-besluit).
In april 2008 kwamen de resultaten beschikbaar van een onderzoek naar de verschillen tussen compex-vragen en reguliere examenvragen, dat door het ICLON (de eerstegraads lerarenopleiding van de Universiteit van Leiden) was uitgevoerd[3]. In dit rapport wordt een aantal redenen genoemd waarom de afgelopen jaren de compex-examens moeilijker genoemd mogen worden dan de reguliere examens. De grotere complexiteit en het geringe gehalte aan 'inkoppers' of reproductieve vragen in het compex-deel leveren daaraan een grote bijdrage. Voor bijna alle compex-vragen was een middelmatige tot hoge mate van creativiteit, structuurherkenning en inzicht nodig. In het rapport wordt ook opgemerkt dat het feit dat de informatie zowel op papier als op de computer wordt aangeboden, ook leidt tot een grotere moeilijkheid. De leerlingen die bij de discussie aanwezig waren, vonden dit desgevraagd niet zo'n groot bezwaar. Ook bij andere vakken heb je soms te maken met meerdere bronnen. Toch kwam het wel een paar keer voor dat informatie van verschillende pagina's in de papieren tekst en vanaf het beeldscherm gecombineerd moest worden. In die gevallen werd het ook door de aanwezige leerlingen wél als een extra belasting ervaren.
Als conclusie kan worden opgemerkt dat de huidige compex-vragen positief ontvangen worden door vooral de iets betere (A12-) leerling. Het grote discriminerende effect van de compex-vragen maakt dat er snel een 'alles of niets' situatie ontstaat. Dit resulteert in slechte resultaten voor zwakkere leerlingen. Dit komt met name door het grote beroep op inzicht dat in compex-vragen gedaan wordt. Dit laatste, samen met het feit dat de vragen vaak realistischer gevonden werden en beter toegespitst op hun toekomst, maakt het voor de iets betere leerlingen juist wel weer interessant en motiverend.

De meerwaarde

In eerste instantie werd gezocht naar de meerwaarde die de aangeboden onderwerpen kunnen hebben voor een vervolgstudie en/of loopbaan. Het omgaan met databestanden werd om deze reden wel als zinvol ervaren en gaf ook een meerwaarde ten opzichte van examens zonder de computer. De aanwezigen op de bijeenkomst waren niet erg optimistisch over de acceptatie en implementeerbaarheid van andere mogelijke toepassingen zoals simulaties en computeralgebra. Bovendien zal het niet eenvoudig zijn om deze toepassingen een goede plaats in het examen te geven.
De leerlingen gaven aan veel waarde te hechten aan authentieke werksituaties. Zo vonden zij dat bij het werken aan de opgaven de toegang tot internet en andere programma's een belangrijke voorwaarde was om recht te doen aan de situatie in bijvoorbeeld de beroepspraktijk. Dat dit in een examensituatie niet haalbaar was zagen zij wel in. Dat er in het schoolexamen wel dergelijke situaties vóórkomen werd door de aanwezige leerlingen niet zo relevant gevonden. Het was verrassend te horen dat er een zeer sterke focus op het centraal eindexamen bestond: Wat je daarvoor moet doen is belangrijk.

De toekomst

Alvorens de discussie over de toekomst begon, werd er een aantal vragen getoond in een CBT-omgeving (Computer Based Testing). Het betrof hier een proefexamen economie en een aantal voorbeeldopgaven wiskunde vmbo-BB. Wat opviel, was dat men weliswaar waardering had voor de lay-out van het examen en de waarheidsgetrouwheid (bijvoorbeeld bij het invullen van getallen voor de berekening van de kinderbijslag moesten velen meteen denken aan het invullen van de belastingaangifte) maar op veel kleine, en met name technische, punten was kritiek. Het ontlokte aan een van de leerlingen de uitspraak: 'Wat is nu de meerwaarde van dit soort examens?' Het antwoord dat op deze vraag gegeven werd, richtte zich vooral op de logistieke voordelen. Als bijzonder voordeel werd genoemd dat het in CBT-examens wel mogelijk is om gemaakte grafieken en ingevulde getallen op te slaan. Dit komt tegemoet aan de vaak geuite wens bij compex-examens om dit mogelijk te maken. Het zou de correctie van het leerling-werk een stuk inzichtelijker maken.
Een groot knelpunt voor het invoeren van CBT-examens wiskunde is het werken met formules. Ook in een wiskunde A-examen moet de leerling gemiddeld wel 40 tot 50 keer een formule opschrijven (uitgaande van de antwoorden in het correctievoorschrift). De huidige trend binnen het wiskundeonderwijs in Nederland is juist dat men de formulevaardigheid weer méér aandacht wil geven. Een mogelijkheid om de aandacht voor formulevaardigheid in computerexamens beter tot zijn recht te laten komen zou een programmaatje zijn dat de notatie zoals die op de GR wordt gebruikt direct omzet in een nette formule De leerlingen zijn aan deze GR-notatiewijze gewend. Toch is het algebraïsch manipuleren van formules handwerk. Het integreren van dit handwerk in de computer zou kunnen door middel van een 'schrijfpad' dat het handgeschreven werk direct in de computer zet (zoals een smartboard dat kan).
Er werd opgemerkt dat de invoering van CBT-examens op termijn wel ter hand genomen zou moeten worden, maar de aanwezigen meenden dat wiskunde daarbij geen voortrekkersrol diende te spelen. De voordelen van CBT-examens lijken voor wiskunde beperkt en de nadelen zijn zo groot dat het zeer moeilijk zal zijn om op dit moment een wiskunde CBT-examen te maken dat door het veld geaccepteerd zal worden en waarvan men de meerwaarde zal inzien.

Dank

Na afloop van de vergadering werden alle aanwezigen bedankt voor hun komst en hun input in de discussie. Met name de docenten Wil Huijben (Laar en Berg,

Laren) en Jan Haverhals (Lyceum Oude Hoven, Gorinchem) werden bedankt voor het feit dat zij enkele welbespraakte leerlingen hadden overtuigd om in hun vakantie naar deze bijeenkomst te komen. Ten slotte werden Daniëlle van de Werf, Jasmijn Koster en Iris Schouwenburg hartelijk bedankt voor hun komst en voor de waardevolle bijdrage die zij aan de discussie hebben geleverd.

Nawoord

Inmiddels heeft het dagelijks bestuur van de CEVO besloten om vanaf 2010 geen compex-examens wiskunde meer aan te bieden. Een van de redenen om er in 2010 mee te stoppen is dat in dat jaar op het vwo voor de eerste keer examens worden afgenomen volgens het nieuwe programma. De CEVO heeft aangegeven dat zij dit najaar een beleidsdocument zal opstellen waarin het beleid ten aanzien van het gebruik van de computer bij (wiskunde) examens zal worden beschreven. Bij het verschijnen van dit artikel is deze beleidsnota waarschijnlijk al openbaar en te vinden op *www.examenblad.nl*. Alle scholen zullen van dit beleidsplan op de hoogte worden gesteld.

Noten

[1] Kijk voor meer informatie over de compex-examens op: *www.cito.nl/vo/ce/compex/compex/eind_fr.htm*

[2] Melanie Steentjes e.a.: *Wiskunde-examens 2008, 1e tijdvak*. In: *Euclides* 84-1, september 2008; pp. 2-17.

[3] René Steenhoek: *Computerexamens onder de loep; verschillen tussen reguliere en computerexamens.* Leiden: ICLON (april 2008).

Over de auteur

Paul van der Molen is wiskundemedewerker en toetsdeskundige van Cito te Arnhem (website: *www.cito.nl*).
E-mailadres: *paul.vandermolen@cito.nl*

Doorlopende Leerlijnen Rekenen en Wiskunde

DEEL 2: ONDERBOUW HAVO/VWO

[Anne van Streun]

1. Oriëntatie op doorlopende leerlijnen

In het eerste deel van de reeks *Doorlopende Leerlijnen Rekenen en Wiskunde* [1] ging het over de aanbevelingen in het rapport *Over de drempels met rekenen* (SLO 2008) [2], op verzoek van OCW uitgebracht door de expertcommissie *Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen,* in de pers de 'commissie Meijerink' genoemd. Inmiddels heeft staatssecretaris Marja van Bijsterveldt de aanbevelingen overgenomen en op basis van het genoemde rapport al veel geld gereserveerd voor een versterking van de doorlopende leerlijnen voor taal en rekenen, vanaf het basisonderwijs tot aan het hbo. Zoals bekend werkt de vernieuwingscommissie voor het vak wiskunde in havo/vwo, de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) in opdracht van het ministerie al enige jaren aan nieuwe programma's voor de bovenbouw havo/vwo en aan een versterking van de doorlopende leerlijn voor rekenen en wiskunde in de onderbouw havo/vwo. Voor die onderbouw heeft cTWO een programmacommissie ingesteld die zich gedurende het jaar 2007 bezig heeft gehouden met het doorlichten van het bestaande programma voor het vak wiskunde in de onderbouw havo/vwo. Voor de rekenlijn heeft deze programmacommissie onderbouw van cTWO (in het vervolg af te korten door PcO) de aanbevelingen die betrekking hebben op de onderbouw havo/vwo, uit het rapport *Doorlopende Leerlijnen Rekenen* overgenomen. Over de algebralijn heeft de staatssecretaris in haar toelichting op de recente beslissing over de examenprogramma's havo/vwo verklaard dat het wachten is op een verzwaarde onderbouw havo/vwo, waarin weer de *abc*-formule wordt onderwezen…

2. Kansen voor de wiskundesectie!

Zoals gezegd heet het ministerie heeft het rapport van de commissie Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen [2] (af te korten met cDL) integraal overgenomen en stimuleert het de implementatie met honderden miljoenen. Niet alleen de bekende instituten hebben al projecten gefinancierd gekregen, maar ook scholen kunnen met geld aan de slag. Los van de financiën is dit een gouden kans om ons wiskundeonderwijs te versterken. Wat is er aan de hand?

a. Het rapport cDL geeft in detail met veel voorbeelden aan wat de basis aan rekenvaardigheden van instromende leerlingen zou moeten zijn. Zie deel 1 van deze serie in *Euclides* 83-8.
b. Het rapport cDL beveelt aan dat in *regionaal overleg tussen scholen* voor basisonderwijs en voortgezet onderwijs de rekenlijnen beter op elkaar moeten aansluiten, met de aangegeven referentieniveaus als uitgangspunt.
c. In het rapport cDL wordt geanalyseerd dat veel wiskundeleraren en de schoolboeken voor havo/vwo er ten onrechte van uit gaan dat de rekenlijnen met succes in groep 8 zijn afgerond en voldoende zijn (en blijven) geconsolideerd.
d. Het rapport cDL stelt dat het gebruiken en onderhouden van basisvaardigheden op het gebied van het rekenen & wiskunde voor een

Wat is juist? Wat niet? Leg uit!

a. $k(a+b) = ka + kb$

b. $\frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$

c. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

d. $(ab)^3 = a^3b^3$

e. $(2p)^3 = 2p^3$

f. $24 \times 24 = (20 \times 20) - (4 \times 4) = 416$

g. $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$

Uit de uitgave: Algebra om te begrijpen, NVvW 2001.
Welke van de onderstaande beweringen zijn soms, altijd, nooit juist? Leg uit!

a. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$

b. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y}$

c. $x - \frac{1}{y} = \frac{xy+1}{y}$

d. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$

e. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

belangrijk deel moet plaats vinden tijdens het toepassen in andere leergebieden en praktijksituaties. De aanpak die in rekenen & wiskunde is aangeleerd moet bij de docenten van *andere vakken* bekend zijn en zoveel mogelijk worden gebruikt.

e. De cDL constateert dat er in de bovenbouw van het basisonderwijs meer rekening moet worden gehouden met verschillen, zowel gericht op het basisniveau als op de verrijking en verdieping voor de groep leerlingen die (veel) meer aan kan.

Een wiskundesectie die werk wil maken van verbetering van de opbrengst van het reken- en wiskundeonderwijs, zal met de schoolleiding in de slag moeten om op minstens drie gebieden te komen tot afspraken en gecontroleerde uitvoering van die afspraken. Het gaat daarbij om:

- *afspraken maken met toeleverende basisscholen over het ingangsniveau havo/vwo;*
- *samenwerking met andere vaksecties in de eigen school over het rekenen;*
- *versterking van de rekenlijn in de wiskundelessen van de onderbouw.*

3. Werken aan niveauverhoging

Voordat we de verschillende subdomeinen van het wiskundeprogramma in de onderbouw havo/vwo bespreken, is het goed om naar de didactische werkwijzen te kijken die noodzakelijk zijn om tot niveauverhoging te komen. In de PcO zijn we over het volgende eens geworden:

3.1 Paraat hebben

Het moet duidelijker worden geformuleerd wat de basis aan kennis en vaardigheden is die leerlingen altijd paraat moeten hebben. Die basis moet regelmatig worden geoefend, geconsolideerd, getoetst en onderhouden.
Leerlingen die een relevante basis aan begrippen en methoden paraat hebben, kunnen die uit hun geheugen oproepen en inzetten voor de aanpak en het oplossen van echte problemen. Zonder die basis is niveauverhoging voor de modale leerling onbereikbaar.

3.2 Goede werkmethoden

Om tot niveauverhoging te komen moet de trend naar alleen maar zelfstandig sommetjes maken worden omgebogen door meer aandacht voor het leren problemen oplossen, overzichten maken, verantwoordingen noteren, redeneren, abstraheren, argumenteren op basis van kenmerken.
Geschikte opdrachten en interactieve werkvormen zijn daarbij noodzakelijk.

In het PISA-2003 onderzoek [3] wordt al gemeld dat Nederlandse leerlingen bij het onderdeel 'probleem oplossen' het niet goed doen en het snel opgeven als een opgave veel tijd of inspanning vraagt. In de schoolboeken van het po en vo komen weinig grote opgaven (problemen) voor, terwijl in de Cito-toetsen en de opgaven in de leerlingvolgsystemen evenmin omvangrijke opgaven voorkomen. In het vo zien we dat de stappen in de opgaven de laatste 20 jaar kleiner zijn geworden om het zelfstandig sommetjes maken te faciliteren. Leren om systematisch problemen aan te pakken vereist interactie met de docenten over de aanpak en het actualiseren van de benodigde kennis.

Daarmee annex is de constatering uit het veldonderzoek van ReAL [4] in het po dat leerlingen aan het eind van het po zelden wordt gevraagd hun uitwerking of redenering op te schrijven of een toelichting te geven bij hun antwoord. Nader onderzoek naar bijvoorbeeld het oplossingsgedrag van leerlingen in het PPON [5] bij slecht gemaakte rekenopgaven wijst uit dat zij zelden gebruik maken van een kladpapiertje en de indruk hebben dat alles uit het hoofd moet. Het inzichtelijk *noteren* van de gekozen oplossingsmethode, het *weergeven* van de gevolgde *redenering*, het *verantwoorden* en *controleren* van de werkwijze en het antwoord, het zijn essentiële aspecten van het leren van wiskunde. Ook hierin is de rol van de docent essentieel. De docent die dit aspect stelselmatig afvraagt en beoordeelt, blijkt de werkwijze van leerlingen gunstig te kunnen beïnvloeden.
Daarnaast is in de wiskunde aandacht voor de onderliggende *abstractie*, het zoeken naar gemeenschappelijkheid, het *abstraheren*, van belang. Bijvoorbeeld: Wat is gemeenschappelijk aan alle vergelijkingen? Welke type functies ken je en hoe kun je die herkennen? Hoe loopt deze rij getallen of dat puntenpatroon door? Hierdoor ontstaat flexibiliteit in het denken en overzicht, wat een wezenskenmerk is van wiskunde. Als je het niet begrijpt en geen verbanden ziet, zijn het allemaal losse feiten, die je geheugen (te) zwaar belasten. De PcO constateert dat deze laatste fase in een leerproces, namelijk de stap van concrete situaties naar een abstractie, in het onderwijs van 12-16 jarigen te weinig uit de verf komt.

4. De subdomeinen van het wiskundeprogramma

4.1. Getallen

De basis voor het subdomein Getallen wordt gelegd in het basisonderwijs en het eerder aanbevolen overleg tussen het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs zal voor een groot deel gaan over de kennis en vaardigheden die leerlingen uit dit subdomein meebrengen naar het vo. Wiskundesecties die zich willen oriënteren op wat haalbaar en redelijk is, doen er goed aan het rapport van de cDL [2] en de *Balans van het rekenwiskundeonderwijs op het einde van de basisschool* [5] te raadplegen.

In het visiedocument van cTWO, *Rijk aan betekenis*, staat o.a. het volgende over de kern van dit subdomein:

- *Onder het getalbegrip valt inzicht in de opbouw van het getalsysteem: natuurlijke getallen, rationale getallen, reële getallen, alle in samenhang met hun bewerkingen. Rekenen met breuken en verhoudingen (procenten, driehoeksmeetkunde) zijn belangrijke aspecten van dit kernconcept. Het is van belang voor alle leerlingen in de onderbouw, ongeacht hun latere profielkeuze.*
- *Een accentverschuiving in de onderbouw is dat meer nadruk wordt gelegd op rekenen met breuken, structuur en opbouw van het getalsysteem (irrationale getallen) en deelbaarheid. Denk bijvoorbeeld aan het kleinste gemene veelvoud en de grootste gemene deler en aan priemgetallen.*

De PcO stemt in met de aanbevolen accentverschuiving. Allereerst gaat het om het vergroten van de vaardigheid in het rekenen met breuken totdat leerlingen bewerkingen met eenvoudige breuken *paraat hebben*. Daarnaast is het kunnen *redeneren* over de eigenschappen van soorten van getallen van belang en het kunnen *uitleggen* van de regels voor de bewerkingen met die getallen. Hoewel vanzelfsprekend de rekenmachine wordt ingezet voor het rekenen met grote getallen en met bijvoorbeeld meetgegevens, willen we benadrukken dat de leerlingen daarnaast veel ervaring moeten opdoen met het handmatig werken met getallen. Een rijk gebied is bijvoorbeeld het opsporen van patronen in rijtjes getallen, mede als een goede ondersteuning van de algebralijn. Hetzelfde geldt voor het onderzoeken van patronen bij het schrijven van breuken in de decimale schrijfwijze. Ook de geschiedenis van de wiskunde geeft rijke voorbeelden van het werken met getallen, zoals bijvoorbeeld het rekenen met de Egyptische stambreuken en de manier waarop de Griekse wiskundigen met getallen rekenden. Het gaat er in alle gevallen om dat leerlingen in een rijke omgeving met getallen blijven werken en leren redeneren, zonder dat ze meteen naar de rekenmachine grijpen. Getallen moeten voor hen *betekenis* krijgen op grond van hun intrinsieke eigenschappen.

Zowel aan het paraat hebben en onderhouden van rekenprocedures als aan het redeneren en argumenteren met getallen moet in de onderbouw van havo/vwo meer systematisch aandacht worden besteed.

Voorbeelden uit RcAL

- Vereenvoudigen van 'letterbreuken' zoals:

  $$\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3} \quad , \quad \frac{m+1}{2m-2}=\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{5p}{20q}=\frac{p}{4q}$$

- Vergelijken van breuken (gelijke noemers of gelijke tellers maken); gebruik van de tekens < en >, ook met simpele algebraïsche expressies.

  Is $\frac{2}{n}$ groter of kleiner dan $\frac{4}{2n+1}$? Waarom? (n staat voor een natuurlijk getal.)

- Herhalen en formaliseren van de operaties optellen en aftrekken; het gelijknamig maken van breuken, ook weer met 'letterbreuken'.

  $$\frac{2}{a}+\frac{3}{a}=\ldots \qquad \frac{a}{2}+\frac{a}{3}=\ldots \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\ldots$$

- Informele en preformele vormen van de operaties vermenigvuldigen en delen herhalen, ook met algebraïsche expressies. Oppervlaktemodel, sprongen op de getallenlijn.

4.2. Verhoudingen

Ook met dit subdomein is al een begin gemaakt in het basisonderwijs: de verhoudingstabel wordt bijvoorbeeld in iedere rekenmethode aangereikt. Zie weer de rapporten [2] en [5] om na te gaan wat van dat onderwijs de gewenste en gerealiseerde opbrengst is. In de discussies over het rekenen wordt dit subdomein vaak genegeerd. Ten onrechte, want juist dit subdomein omvat veel (maatschappelijke) toepassingsproblemen, immers, het *gebruiken* van rekenen & wiskunde betreft vaak verhoudingsproblemen. Verhoudingen kunnen worden beschreven:

- in *verhoudingentaal*, zoals bij 'één op de tien Nederlanders' of 'het aantal fietsers is twee keer zo groot als het aantal automobilisten';
- in *breukentaal*, bijvoorbeeld 'driekwart van de inwoners is ouder dan 25 jaar';
- met *procenten*, zoals '70 procent van de mensen is voor de aanleg van een randweg'.

Begrip van verhoudingen houdt in dat de relatie tussen die verschillende beschrijvingen kan worden gelegd en dat leerlingen dit begrip kunnen inzetten bij het met succes oplossen van verhoudingsvraagstukken.

Verhoudingen worden gevonden in situatiebeschrijvingen, schema's, tabellen, grafieken, plattegronden en kaarten. Maar ook vaak in situaties uit het dagelijks leven, bijvoorbeeld bij het aanpassen van hoeveelheden in recepten aan het aantal personen. De verhoudingentaal sluit aan bij de terminologie zoals die in het dagelijks leven gebruikt wordt.[6]

Wegens de veelheid aan situaties en contexten waarin verhoudingen worden gebruikt, is het voor leerlingen niet eenvoudig het gemeenschappelijke onderliggende concept en de toe te passen methode te herkennen. Daar komt nog bij dat in verschillende schoolvakken waarin met verhoudingen wordt gerekend, veelal heel specifieke rekenprocedures worden toegepast, waarin de bij wiskunde onderwezen, didactisch breed inzetbare, methoden niet zijn te herkennen. De belangrijkste probleemaanpak in contexten met verhoudingen bestaat uit het systematisch weergeven van de gegevens en het gevraagde in een zogenoemde *verhoudingstabel*, het zoeken van de *vermenigvuldigingsfactor* en het uitvoeren van berekeningen met die factor, bijvoorbeeld in de opgestelde verhoudingstabel. Die vermenigvuldigingsfactor of groeifactor of per-factor speelt een rol bij vergroten en verkleinen, bij berekeningen met schaal en in al de eerder vermelde situaties. Het is een kernconcept in het subdomein *Verhoudingen* met als belangrijkste leerdoel dat leerlingen hebben begrepen en gememoriseerd dat het in al die situaties gaat om het *vermenigvuldigen met een factor* en (waar nodig) een systematische *probleemaanpak met een verhoudingstabel*. Voor het opbouwen van dit inzicht en overzicht is veel interactie met de leraar noodzakelijk, want van papier alleen is dat niet te leren!

Schoolbeleid en overleg tussen vaksecties binnen de scholen van voortgezet onderwijs moet leiden tot een voor leerlingen herkenbare gemeenschappelijke aanpak van het werken met verhoudingen in de grote variëteit aan toegepaste situaties in schoolvakken en beroepen.

4.3. Verbanden en functies

In het basisonderwijs wordt een eerste aanzet gegeven voor het subdomein *Verbanden* in de vorm van het bestuderen van grafieken en diagrammen die numerieke gegevens uit tabellen visualiseren of het verband tussen twee grootheden of hoeveelheden. Ook de overgang naar de informele algebra, zoals het ontdekken en voortzetten van een regelmaat in patronen van stippen of blokjes of van getalpatronen of het generaliseren naar een woordformule behoren in het basisonderwijs (voor de betere leerlingen) tot dit gebied. De brede benadering van de studie van verbanden tussen grootheden met de vier representaties (verbaal, numeriek, grafisch, analytisch) heeft in het Nederlandse wiskundeonderwijs voor 12-16 jarigen de plaats ingenomen van de smalle benadering van functies, die door middel van een functievoorschrift $f(x)$ worden vastgelegd. Het is evident dat die brede benadering meer *betekenis* heeft voor zowel de brede leerlingenpopulatie van 12-16 jarigen als voor het toepassingsbereik op allerlei gebieden, waarin formules centraal staan die verbanden tussen allerlei grootheden vastleggen. In de veelheid van contexten, representaties en typen verbanden in het huidige programma is het evenwel voor leerlingen niet zo duidelijk wat de onderliggende structuur is, zodat het voor hen moeilijk is om een *overzicht* te krijgen van waar het eigenlijk om gaat. Ook uit de schoolboeken is slecht op te maken wat nu eigenlijk de kernconcepten zijn en welke feitelijke kennis en routines leerlingen *paraat* moeten *hebben* en *houden*.

De PcO stelt het volgende voor:

1. *Van de lineaire verbanden moeten de leerlingen in de loop van het tweede leerjaar alle representaties en overgangen vlot beheersen, inclusief de algebraïsche herleidingen van lineaire formules en eerstegraads vergelijkingen.*
2. *Leerlingen moeten in de loop van het derde leerjaar in een context met een exponentieel verband elk van de representaties kunnen weergeven en interpreteren in termen van de context en karakteristieken van het verband (startwaarde, groeifactor).*

Het onderzoek van de tweedegraads functies heeft een ander karakter dan van de lineaire en exponentiële verbanden. De contexten spelen geen belangrijke rol meer, terwijl algebraïsche herleidingen sterk naar voren komen. Het lastige voor leerlingen en voor de didactiek van dit onderwerp is de moeilijkheid om *betekenis* te geven aan die algebraïsche vormen, zoals die in functievoorschriften en vergelijkingen voorkomen. De PcO stelt voor om het onderwijs in de tweedegraads functies opnieuw te ordenen rond de grafische interpretatie van de vier typen formules, waardoor een tweedegraads functie kan worden vastgelegd. Zie ook de artikelenserie *Parate kennis en Algebra* in *Euclides* jaargang 82.[7]

3. *In de loop van 3-havo/vwo moeten alle leerlingen de grafische interpretatie van de vier typen functievoorschrift paraat hebben. Dat moet het startpunt zijn van de nog te onderwijzen algebraïsche herleidingen.*

Zie noot [4].

4. *Aan het einde van de onderbouw havo/vwo moeten alle leerlingen vlot eenvoudige vergelijkingen van het type $y = \pm x^2 + bx + c$ kunnen ontbinden in factoren, in kwadraat afgesplitste vorm schrijven en daaruit relevante conclusies kunnen trekken. De abc-formule is het uiterste redmiddel!*

Nadat de leerlingen de verschillende verschijningsvormen van de formule voor tweedegraads functies kunnen interpreteren in termen van de grafiek en naar behoefte snel een schetsje kunnen maken van de ligging van de parabool, wordt natuurlijk de vraag opgeroepen of je bij *elk type formule* de kenmerken van de bijbehorende parabool kunt opsporen. Dat leidt tot het bekende algebrawerk, zoals het ontbinden in factoren en het kwadraat afsplitsen. Ontbinden in factoren om de nulpunten op te sporen, kwadraat afsplitsen voor het berekenen van de coördinaten van de top en/of het berekenen van de nulpunten. Voor het ontwikkelen en onderhouden van *algebraïsche vaardigheden* is het wenselijk en haalbaar dat alle leerlingen in 3-havo/vwo

Een ervaring uit het project RaAL met enkele toetsopgaven in 3-havo/vwo

In het kader van het project RaAL zijn aan leerlingen in een aantal klassen 3-havo/vwo de volgende vragen voorgelegd.
Probeert u het ook eens in uw klassen en vergelijk die resultaten eens met de impressie van de geciteerde leraar.

1. De parabool met de vergelijking $y = (x - 2)^2 + 5$ heeft geen snijpunten met de x-as. Hoe kun je dat zeker weten zonder de grafiek te tekenen?

Leraar: *[illegible] (structuur van formule) of direct melden dat bij deze dalparabool het laagste punt (2, 5) is. Leerlingen gaan rekenen, weinigen geven een adequate redenering of berekening.*

2. Verander de vergelijking van vraag 1 zo, dat de grafiek twee snijpunten met de x-as heeft.

Leraar: *Leerlingen rommelen wat met de tekens, geen enkele havo-leerling redeneert over de grafiek of over de top. Enkele vwo-leerlingen veranderen +5 in −5, zonder redenering. Anderen veranderen −2 in +2. Teleurstellend.*

3. Verander de grafiek uit vraag 1 zo, dat de grafiek precies één snijpunt met de x-as heeft.

Leraar: *Deze vraag is verwant aan vraag 2 en wordt zeker zo slecht gemaakt. Twee vwo-leerlingen redeneren expliciet over de top. Een leerling (vwo) maakt deze opgave volledig goed met [illegible]. Twee havo-leerlingen geven als formule $y = x^2$! [illegible].*

4. Hester beweert dat iedere parabool een snijpunt heeft met de y-as. Heeft ze gelijk? Leg je antwoord uit.

Leraar: *Deze vraag is slechter gemaakt dan ik verwachtte. Veel leerlingen redeneren wel over het beeld van de grafiek, maar dat doen ze niet altijd goed. Een voorbeeld van een onjuist antwoord (fout): "Nee, ze kunnen ook tussen de x- en de y-as zweven". Ruim 25% van de vwo-leerlingen geeft een correct antwoord en [illegible] 5% [illegible]. Ca. 20% van alle leerlingen verwisselt x en y.*

zowel het ontbinden van de vorm $y = \pm x^2 + bx + c$ als het kwadraat afsplitsen van die vorm onder de knie krijgen, paraat hebben en onderhouden. Herleidingen met als doel bepaalde vragen over de grafiek te kunnen beantwoorden! Voor de B-differentiatie in 3-havo en voor 3-vwo kan die vaardigheid worden uitgebreid naar vormen van het type $y = ax^2 + bx + c$. Het hoeft geen betoog dat in de fase van het verkennen van de typen grafische software goede diensten kan bewijzen.

5. *Voor het onderzoek van allerlei verbanden, al dan niet in een context gerepresenteerd, is het wenselijk dat leerlingen voor de ontwikkeling van symbol sense regelmatig grafische software gebruiken om de karakteristieken van een verband op te sporen en die te relateren aan de interpretatie van de bijbehorende formule.*

het rekenen aan meetkundige vormen. De berekeningen van lengte en hoekgrootte (onder andere met de stelling van Pythagoras en goniometrie), oppervlakte en inhoud en het rekenen met verhoudingen bij gelijkvormige figuren vormen de kern van dit subdomein. Er is enige aandacht voor het tekenen van ruimtelijke vormen (perspectief) en aanvankelijk wordt er iets gedaan aan kijkmeetkunde. Allemaal onderwerpen die de moeite waard zijn, veelal decennia zo worden onderwezen, maar weinig onderlinge samenhang vertonen.
Die geringe samenhang is jammer, maar onze commissie zag geen kans een beter alternatief te formuleren.
Wel zijn we van mening dat, gelet op de inhoud van de nieuwe bovenbouw havo/vwo met name voor de aansluiting op wiskunde B, enkele meetkundemodulen voor 3-havo en 3-vwo moeten worden ontwikkeld om de leerlingen met voldoende

Voorbeeld een probleemgerichte, interactieve introductie van kwadraat afsplitsen

Je ziet hieronder een aantal functies staan, in willekeurige volgorde. We zoeken de coördinaten van de snijpunten van elk tweetal grafieken.
Begin met het zoeken en controleren van de eenvoudigste vergelijkingen en gebruik die methode om meer ingewikkelde vergelijkingen op te lossen.
Schets eerst de onderlinge ligging van beide grafieken en controleer daarmee achteraf of je oplossing kan kloppen.

$f(x) = (x - 3)^2$	$m(x) = 64$	$q(x) = 81$
$g(x) = 9$	$n(x) = (x - 3)^2 - 16$	$r(x) = x^2 - 6x$
$h(x) = x^2$	$p(x) = 9(x - 8)^2$	$s(x) = 16$
$k(x) = 4(x - 3)^2$		

Rijk oefenmateriaal is te vinden in het project ReAL, in *Wat a is kun je niet weten* [8], in *Oefeningen in algebra* [9] en via de applets op WisWeb [10].

4.4. Meetkunde en Meten

Aan de beide subdomeinen *Meten* en *Meetkunde* wordt in het basisonderwijs de nodige aandacht besteed, met name aan het meten van lengte, oppervlakte, inhoud, en gewicht. Volgens het onderzoek PPON [5] presteren de leerlingen van groep 8 al 20 jaar slecht op het onderdeel *Meten*. Gelet op de toepassingswaarde van *Meten* in allerlei schoolvakken, in maatschappelijke situaties en beroepssituaties is het de moeite waard om ook in de onderbouw van havo/vwo na te gaan of leerlingen de basisvaardigheden op dit gebied voldoende beheersen. Dat meten kan binnen het onderbouwprogramma goed in het subdomein *Meetkunde* worden opgenomen. Het zwaartepunt ligt in *Meetkunde* bij het beschrijven van de ruimte om ons heen en

aanleg en interesse meer uitdaging en betere ontwikkelingsmogelijkheden te bieden dan het huidige standaardprogramma heeft te bieden. We stellen een module voor waarin redeneren centraal staat (bijvoorbeeld rond constructies) en een module waarin de verbinding tussen algebra en meetkunde, analytische meetkunde, wordt aangezet.

Het gehele onderbouwprogramma meetkunde is zinvol en haalbaar, maar voor de aanstaande B-leerlingen is het gewenst een tweetal verdiepende meetkundemodulen te ontwikkelen.

4.5. Gegevensverwerking

Over de resterende onderwerpen in het huidige onderbouwprogramma kunnen we kort zijn. In de PcO en in de brede kring van scholen en leraren waar de commissieleden contact mee had, bleek weinig waardering voor de losse hoofdstukjes over informatieverwerking, beschrijvende statistiek en kans. In de praktijk worden ze vaak overgeslagen. Dat is jammer want juist die onderwerpen zijn maatschappelijk van groot belang en zouden de leerlingen moeten oriënteren op de CM- en EM-profielen en de plaats van de wiskunde in die vakgebieden.
Wij stellen dan ook voor om een nieuw, intern samenhangend, deelprogramma te ontwerpen met als thema *Gegevensverwerking*, waarin het verwerken en analyseren van data centraal staat, met daarbij inbegrepen de centrale concepten uit de beschrijvende statistiek die kenmerkend zijn voor een dataverzameling. Goede dataverzamelingen, zoals het grote project van het CBS, de NVvW en het FI, de Nationale Doorsnede, zijn er zeker te vinden. En het breed gebruikte softwareprogramma VU-Stat is heel geschikt als hulpmiddel bij deze nieuwe oriëntatie.
Er moet natuurlijk ook aansluiting gezocht worden bij de ontwikkeling van het nieuwe statistiekprogramma in de bovenbouw havo/vwo.

De ontwikkeling van een module 'Gegevensverwerking' is gewenst om een samenhangende leerlijn voor het verwerken van gegevens met behulp van beschrijvende statistiek te realiseren.

5. Het vervolg

Op basis van dit rapport is een kleine werkgroep aan de slag gegaan om de verschillende aanbevelingen concreet uit te werken in een *trajectenboek*. In het bijzonder zal de aandacht uitgaan naar een heldere formulering van de basis aan kennis en vaardigheden die leerlingen tegen het einde van 3-havo en 3-vwo *paraat* moeten hebben. Een fasering over de verschillende leerjaren ligt daarbij natuurlijk voor de hand. Daarnaast moeten de voorgestelde nieuwe modulen worden uitgewerkt. Een eerste versie van dit trajectenboek zal aan het onderwijsveld voor commentaar worden voorgelegd. De gedachte is dat de eindversie tot een aanpassing van de schoolboeken in de aangegeven richting zal moeten leiden.

Programmacommissie

De programmacommissie onderbouw havo/vwo bestaat uit:

- Saskia van Boven, docent wiskunde, schoolleider (*s.vanboven@hetnet.nl*);
- Leon van den Broek, docent wiskunde, auteur Wageningse Methode (*leon.vandenbroek@wageningse-methode.nl*);
- Kees Buys, auteur Wis en Reken, leer-planontwikkelaar SLO (*kbuys@dds.nl*);

- Adri Knop, docent wiskunde (*a.knop@tabor.nl*);
- Anja Moeijes, docent wiskunde (*a.moeijes@tabor.nl*);
- Anne van Streun, emeritus hoogleraar RUG, lid cTWO (*avstreun@euronet.nl*);
- Monica Wijers, onderwijsontwikkelaar FI, ReAL (*monica@fi.uu.nl*).

Verwijzingen

[1] Zie *Euclides* 83-8, pp. 417-420 voor deel 1.

[2] Zie *www.minocw.nl/documenten/4322.pdf*
- Eindrapport Expertgroep: *Over de drempels met taal en rekenen*. SLO 2008.
- Deelrapport rekenen & wiskunde: *Over de drempels met rekenen*. SLO 2008.

[3] T. Dekker, K. Lagerwaard, J. de Lange e.a. (2006): *Wiskundegeletterdheid volgens PISA / Hoe staat de vlag erbij? 1.Analyse*. Utrecht/Arnhem: Freudenthal Instituut/Citogroep.

[4] Zie *Leerlijnen* op de website van het project ReAL: *www.slo.nl/themas/00019/00001/00002/*

[5] J. Janssen, F. van der Schoot, B. Hemker (2004): *Balans van het rekenwiskundeonderwijs op het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Citogroep; PPON-reeks, nr. 32.

[6] Zie *www.fi.uu.nl/bps/* voor artikelen over verhoudingstabellen in verschillende vakken.
In het Salvo-project van het FIsme is samenhangend lesmateriaal ontwikkeld voor wiskunde en science (zie: *www.cdbeta.uu.nl/vo/salvo/*).

[7] A. van Streun (2007): *Parate kennis en Algebra*. In: *Euclides* 82, pp. 53-54, 111-112, 151-152, 183-184, 232-233, 274-276, 321-323.

[8] Paul Drijvers e.a (2006): *Wat a is dat kun je niet weten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[9] Martin Kindt (2003): *Oefeningen in algebra*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[10] Voor applets zie *www.wisweb.nl*

Over de auteur

Anne van Streun was voorzitter van de werkgroep rekenen & wiskunde van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.
E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*

Opleiding Onderwijs-assistent werkt hard aan doorlopende leerlijnen om grote uitval bij doorstroom naar pabo's te verminderen

EEN REACTIE OP HET ARTIKEL 'DOORLOPENDE LEERLIJNEN REKENEN EN WISKUNDE, DEEL 1' VAN ANNE VAN STREUN

[Thomas van den Elsen]

Graag wil ik reageren op het artikel van Anne van Streun in nummer 8 van Euclides (jaargang 83, juli 2008). Het is positief dat er een werkgroep bezig is om doorlopende leerlijnen rekenen en wiskunde in kaart te brengen want inderdaad, er moet nog veel gebeuren in onderwijsland willen de problemen met betrekking tot de aansluiting naar het hbo zijn opgelost. De heer Van Streun geeft aan dat er grote problemen zijn met de aansluiting naar de pabo (zie kader op pag. 94). Vooral het mbo (afdeling Onderwijsassistenten) moet het ontgelden en dat is mijns inziens niet terecht. Momenteel wordt er bij deze afdeling, waarvandaan veel studenten naar de pabo gaan, een inhaalslag geleverd als het gaat over Nederlandse taal en rekenen. Hierover later meer. De meeste studenten van havo en vwo die naar de pabo gaan, hebben alleen wiskunde A in hun pakket gehad en hun rekenvaardigheid is vaak weggezakt.

Pabo-problematiek
De pabo-problematiek is in de eerste plaats veroorzaakt door het feit dat ongeveer de helft van de eerstejaars afkomstig is van een mbo-opleiding (onderwijsassistent). Die binnenstromende studenten hebben de laatste vier jaar op het mbo niet meer gerekend, want rekenen en/of wiskunde is daar geen onderdeel van het curriculum. Daarvoor heeft een deel van deze groep na twee jaar vmbo het vak wiskunde laten vallen en op die leeftijd van 13-14 jaar behoorden die leerlingen tot de zwakste rekenaars van de totale leerlingenpopulatie. Met andere woorden, na een zwakke start met de ontwikkeling van hun rekenvaardigheden hebben ze zes jaar lang niet meer gerekend. En zo komen ze aan bij de pabo! Welkom, goed gemotiveerd, maar met veel te weinig inhoudelijke bagage. De door ons voorgestelde oplossing is voor een deel in het schema van het referentiekader terug te vinden. Alle leerlingen met een mbo-4-diploma moeten referentieniveau 3F bereiken, dat is een uitbreiding van 2F, het rekendomein van 4 vmbo BB-KB. Daarnaast bevelen we aan om studenten die naar de pabo willen een verdiepende module *Getallen* 3S te laten bestuderen, zowel op het mbo als op de havo. (Module 3S past in het nieuwe wiskunde A programma van de havo.) Wij vinden een goede *eigen* rekenvaardigheid en inzicht in de structuur van de getallenwereld een noodzakelijke beginvoorwaarde voor het op niveau leren onderwijzen van rekenen in het basisonderwijs. Op de pabo kan vervolgens verder worden gewerkt aan het onderhouden en versterken van dat eigen inzicht en de eigen rekenvaardigheid (4S?).

Waarom kwamen Onderwijsassistenten kennis tekort voor de pabo doorstroom?

Toen ik 5 jaar geleden rekenen ging geven bij het team Onderwijsassistenten van het ROC – voorheen gaf ik wiskunde en werktuigbouwkunde bij de afdeling techniek – schrok ik van het lage niveau van deze studenten. Al gauw kwam ik erachter dat de meeste studenten nauwelijks wiskunde hadden gehad, omdat ze grotendeels van het vmbo-t komen met de afstudeerrichting Zorg en Welzijn. De meesten hebben niets met rekenen. In de eindtermen van de afstudeerrichting Onderwijsassistent van het ROC stond vaag iets omschreven over het vak rekenen, maar daar kon je alle kanten mee op. Het vak rekenen werd daarom in veel gevallen stiefmoederlijk behandeld met als gevolg dat veel studenten vastliepen als ze verder wilden op de pabo.

Wie bepaalt wat belangrijk is voor studenten?

Het is vreemd dat het vak rekenen zo vaag is opgenomen in het curriculum, wetende dat het werkveld (basisonderwijs) de inhoud hiervan bepaalt. Het landelijk orgaan Calibris, voorheen het OVDB, maakt in overleg met het ministerie de kwalificatiedossiers. De laatste jaren vinden hierin constant ingrijpende wijzigingen plaats, ook inhoudelijk. Dat maakt het voor ROC's niet gemakkelijk. De Nederlandse taal is volgens de standaarden van het Europees Raamwerk overgenomen in het kwalificatiedossier. Hierin is een eindniveau C1 vergelijkbaar met havo/vwo; nogal ambitieus lijkt mij, voor studenten die vmbo als vooropleiding hebben. Het vak rekenen is niet specifiek benoemd in het dossier. Wel is LerenLoopbaanBurgerschap (LeLoBu) geïntroduceerd in het mbo. Hierin staan minimumeisen die mbo-ers moeten beheersen op verschillende gebieden zoals politiek bewustzijn, sociale zekerheid, werknemersrechten en Engels. Helaas is het vak rekenen hierin ook niet opgenomen. Een opleiding mag zelf bepalen aan welke vakken ze extra aandacht wil schenken. De landelijke tendens is dat de opleiding Onderwijsassistent dat doet voor het vak rekenen, mede gezien de hoge doorstroom naar de pabo.

Er zijn goede ontwikkelingen gaande in het mbo

Inmiddels weet iedereen dat men in het rapport Dijsselbloem vergeten is om het mbo – goed voor een half miljoen studenten – mee te nemen in het onderzoek en dat is betreurenswaardig. Het CGO (Competentie Gericht Onderwijs) heeft zijn intrede gedaan en zowel voor docenten als studenten is dat een hele cultuuromslag. Studenten die hiermee goed uit de voeten kunnen, hebben daar veel voordeel bij als ze verder willen in het hbo. Ongeveer 80-90% van de studenten die de opleiding Onderwijsassistent hebben afgerond vervolgt een studie in het hbo. Een paar jaar geleden ging ongeveer 90% hiervan doorstuderen op de pabo. Momenteel ligt dat percentage een stuk lager. Er zijn veel nieuwe studies bijgekomen die de aandacht trekken van de student. In tegenstelling tot wat de heer Van Streun in zijn artikel aanhaalt kan ik zeggen dat er op veel ROC's al extra aandacht aan taal en rekenen wordt besteed. Zo bestaat er in Zuidoost Brabant in de regio Helmond-Eindhoven-Veghel-Oss al drie jaar een werkgroep bestaande uit docenten van de opleiding Onderwijsassistent en pabo-docenten die nauw samenwerkt op het gebied van taal en rekenen. Momenteel opereren daar drie ROC's samen met drie pabo's (recent ook Nijmegen). Programma's worden uitgewisseld, er vindt overleg plaats en we bespreken deficiënties die studenten hebben teneinde remediërende programma's samen te stellen zodat deze studenten, nog vóór ze op de pabo zitten, een goede rugzak hebben. Met name voor de vakken taal en rekenen heeft dit al tot succes geleid. Studenten van het ROC, die naar de pabo willen, kunnen al in het laatste jaar van hun studie de propedeusetoets maken voor taal en rekenen. Dit werkt erg motiverend voor deze toekomstige pabo-studenten en velen die een extra reken- en taalprogramma volgden op het ROC, behaalden reeds bij de eerste poging het Cito-certificaat. Daarvoor moesten ze naar de pabo om de toets te maken en ook daar gaat iets positiefs vanuit. Gaat het bij de eerste poging ergens midden in het schooljaar mis, dan krijgt de student een remediërend programma op het ROC en tegen het einde van het schooljaar is er een tweede kans. De uitdraai van de Cito-toets geeft aan waarin een student nog tekort schiet. De rekendocent van het ROC bespreekt met deze student de uitslag en biedt op individueel niveau remediërende programma's aan. Soms stelt de rekendocent zelf een reader samen met opgaven en soms gaat men uit van bestaande boeken, bijv. Rekenwijzer. Ervaring leert dat studenten die op het ROC de voorbereidende taal- en rekenlessen volgen, een veel grotere slagingskans hebben op de pabo dan studenten die deze lessen niet volgen. Nu maar hopen dat deze positieve ontwikkeling wordt ondersteund door de beleidsmakers, waaronder de politiek.

Over de auteur
Thomas van den Elsen is docent wiskunde/rekenen op ROC Ter AA te Helmond bij het team Onderwijsassistenten.
E-mailadres: *t.v.d.elsen@roc-teraa.nl*

Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen

INTERVIEW MET KEES BUIJS



[Joke Verbeek]

'Proefschrift ter verkrijging van de graad van doctor aan de Universiteit Utrecht' staat er plechtig op het titelblad waarop ook te lezen is dat Kees Buijs (1949) het proefschrift met bovenstaande titel verdedigde op 19 mei 2008. Trefwoorden zijn 'aanpakgedrag', 'notatiegedrag', 'progressief mathematiseren' en 'wiskundige kernideeën', niet direct woorden waar meteen een beeld bij gevonden wordt. Alle reden om een afspraak te maken en in een rumoerige Amsterdamse stationsrestauratie het proefschrift door te nemen met de maker.

Actueel modieus onderwerp

In het rapport *Over de drempels met taal en rekenen* (van de Expertgroep Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen, voorzitter Heim Meijerink, januari 2008) wordt het meercijferig vermenigvuldigen genoemd als een onderwerp dat aanleiding geeft tot zorg. In alle media wordt het - al dan niet vermeende - gebrek aan rekenvaardigheden breed uitgemeten, en voor- en tegenstanders van 'ouderwets' rekenen discussiëren publiekelijk over het nut en onnut van cijferen en hoofdrekenen. Kortom: rekenen is hot. Toch is die belangstelling voor Kees Buijs niet de reden geweest om juist dit onderwerp te kiezen. 'Nee, ik ben in 2003 al aan dit proefschrift begonnen. Toen speelde dat allemaal nog niet zo sterk', vertelt Kees. 'Het heeft ook even geduurd voordat de onderzoeksvragen definitief waren. Aanvankelijk zou mijn studie gaan over hoofdrekenen met grote getallen. Maar al doende bleek dat de achteruitgang in rekenen juist bij het vermenigvuldigen van meercijferige getallen te zien was. Dus bij opgaven als 23 × 25 en 13 × 165. Daarom was het interessant om daarop door te gaan.'

De belangrijkste onderzoeksvraag werd als volgt geformuleerd:

'Hoe kan een onderwijsleertraject rond het vermenigvuldigen van meercijferige getallen worden vormgegeven zodat het aansluit bij de eigen, informele strategieën van leerlingen op dit gebied en waarin deze strategieën gaandeweg worden uitgebouwd tot efficiënte, notatie-ondersteunde hoofdrekenstrategieën in de sfeer van gestileerd hoofdrekenen?'

Gelet op deze onderzoeksvraag was het duidelijk dat het onderzoek het karakter moest krijgen van een ontwikkelproces, om te proberen een aantal ideeën te ontwikkelen die in een onderwijs-experiment uitgeprobeerd zouden worden. Na het leggen van een theoretisch fundament werd een leergang ontworpen die steeds verder werd uitgebreid tot het niveau van werkbladen, lesbeschrijvingen, toetsen en onderwijsactiviteiten.

Leraren van vijf basisscholen werden geïnformeerd over de leergang en begeleid bij het uitproberen in de klas. De bevindingen werden vastgelegd in het proefschrift.

Voor het afronden van het proefschrift heeft Kees van zijn werkgevers, SLO en Bekadidact, alle ruimte en medewerking gekregen. Ook is hij in de fase van de eindredactie minder gaan werken, waardoor van nachtenlange opsluiting op een studeerkamer geen sprake was. 'Nee hoor', verzekert hij, 'ik heb er gewoon een tijdlang 2 à 3 dagen per week aan besteed. Overdag.'

S1-strategie als basisstrategie

Kees heeft een leergang ontwikkeld waarbij leerlingen wordt geleerd hoe zij opgaven als 24 × 68 kunnen aanpakken. 'De meerwaarde is gelegen in het op een inzichtelijke manier aanleren van procedures', vertelt hij vol verve. 'De leerlingen moeten daarbij onder meer leren de distributieve eigenschap steeds efficiënter te gebruiken. Als ze daarna op de middelbare school met algebra verder gaan, kun je daarop voortbouwen, bijvoorbeeld bij het oplossen van tweedegraads vergelijkingen.'

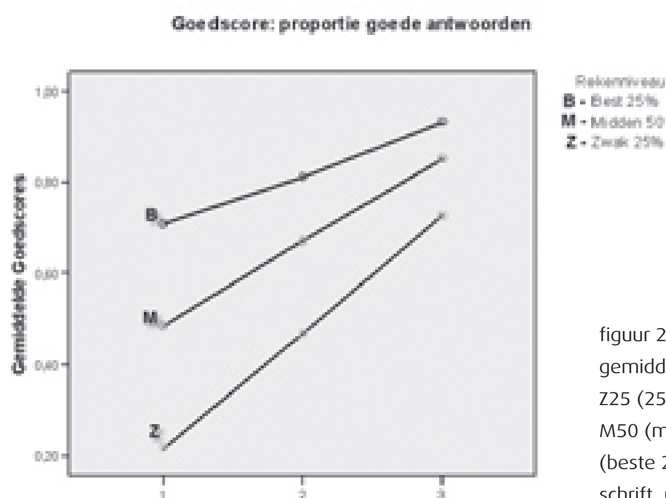
De beoogde basisstrategie voor het vermenigvuldigen noemt hij in zijn proefschrift S1, waarbij het eerste getal decimaal gesplitst wordt en het tweede getal als geheel wordt opgevat. Dus 24 × 68 wordt opgesplitst in 20 × 68 en 4 × 68. Hoe de leerlingen dan verdergaan kan verschillen. De illustratie (***in figuur 1***) laat een aantal eigen strategieën van leerlingen zien. In de voorbeelden links en rechts is sprake van een nog wat verdere splitsing van het eerste getal (in 10 × 68 en nog eens 10 × 68); bij het voorbeeld in het midden is dat niet het geval. In het onderzoek is nadrukkelijk onderzocht hoe leerlingen daarbij hun eigen notatievormen kunnen ontwikkelen.

figuur 1 S1-strategie halverwege de leergang; mooie voorbeelden van eigen notatievormen - uit het proefschrift, pag. 267

In de leergang wordt toegewerkt naar een steeds efficiëntere notatievorm. ‘De strategieën zijn het middel, niet het doel’, beijvert Kees zich uit te leggen. ‘Want daar heeft professor Jan van de Craats wel een punt met zijn kritiek op veel rekenmethodes. In sommige realistische methodes worden handige strategieën met name binnen het domein van het hoofdrekenen haast het doel. Handig rekenen mag echter niet dominant zijn. Het onderwijs moet zich concentreren op essentiële inzichten, zoals de distributieve eigenschap en de positieregel. Die leggen de basis voor de algebra. Het klassiek cijferen is dan een tussendoel.’
Kees geeft toe dat dat voor havo- en vwo-leerlingen belangrijker is dan voor vmbo-ers. Maar ook vmbo-ers moeten de S1-strategie beheersen. ‘Ook een vmbo-leerling moet bij het berekenen van 12 × 15 aanvoelen dat de uitkomst 110 (gevonden door 10 × 10 + 2 × 5) niet correct is. Je kunt ook voor hen aannemelijk maken dat het fout is.’

Resultaat

De bedoeling is dat elementen uit de leergang die Kees ontwikkelde, hun weg vinden naar de praktijk op diverse plaatsen. Uitgevers kunnen het proefschrift aanschaffen en auteurs van rekenmethodes kunnen zich verdiepen in de leergang en de ideeën toepassen in hun boeken. De richting die Kees aangeeft is een middenweg: inoefenen van de vaardigheden gebaseerd op inzicht. Belangrijke elementen daarbij zijn aansluiten bij informele kennis en systematisch aandacht voor hulpnotaties. ‘Ook onderwijzers moeten vaak nog overtuigd worden van het nut van tussennotaties’, weet hij. ‘De hoeveelheid leerlingen die geen hulpnotaties gebruikt is toegenomen. Dat komt ook door de Cito-toets. Die is bepalend voor het basisonderwijs. En kladblaadjes en hulpnotaties spelen in de Cito-toets een ondergeschikte rol.’
Dat zijn leergang succes heeft is goed te zien in de grafiek waarin de toetsresultaten aan het begin, halverwege en aan het eind van de leergang in beeld worden gebracht; ***zie figuur 2.*** De goedscore van vooral de zwakkere leerlingen is behoorlijk toegenomen. Bovendien is er sprake van een zekere convergentie: het niveauverschil tussen de betere en zwakkere leerlingen wordt gaandeweg kleiner. Ook bleek er progressie te zijn in het strategiegebruik en het notatiegedrag. Het verschil tussen jongens en meisjes bleek nihil.



figuur 2 De grafiek rond de gemiddelde goedscores van Z25 (25% zwakste leerlingen), M50 (middelste 50%) en B25 (beste 25%) - uit het proefschrift, pag. 234

Aanbevelingen

Het hart van Kees Buijs ligt bij het rekenonderwijs. Hij is goed op dreef en heeft gefundeerde meningen over een heel scala aan onderwerpen op dit gebied. Zo vindt hij dat leerkrachten met elkaar moeten praten: ‘Onderwijzers overleggen soms te weinig over de didactische aanpak. Ze weten niet altijd van elkaar hoe ze iets aanpakken. Ook secties op middelbare scholen hebben vaak hun eigen agenda en prioriteiten. Laat de secties wiskunde, economie en natuurkunde overleggen over de manier waarop ze bijvoorbeeld met procenten of formules omgaan, laat ze één lijn volgen. Nu lijken het voor de leerlingen soms wel hele verschillende opgaven. Daar moet meer samenhang in komen.’
Ook moet het op de basisschool niet zo zijn dat de zwakke leerlingen nooit aan breuken, procenten en kommagetallen toekomen. Dat is de stof van groep 7 en 8, maar die moet eventueel vertraagd ook door zwakke leerlingen worden begrepen. ‘Een klassikale interactieve benadering laat zien dat dezelfde leerstof op verschillende niveaus door leerlingen kan worden verwerkt. Die didactiek heeft bewezen resultaat op te leveren.’
Kees vindt wel dat het rekenprogramma van de basisschool overladen is. ‘Er is van alles bijgekomen: schattend rekenen, meten, meetkunde, en ga zo maar door, terwijl er zelden of nooit iets is afgegaan. En dat terwijl de tijd die aan rekenen besteed wordt, ongeveer hetzelfde is gebleven. Geen wonder dat de resultaten op sommige gebieden teruglopen.’

Suriname

Kees valt niet in een gat nu zijn proefschrift af is. Hij gaat zijn projecten op SLO (het Nationaal Expertisecentrum voor Leerplanontwikkeling) weer wat intensiever oppakken. Eén daarvan is een project in Suriname. De leergang rekenen van 4-15 jaar moet daar worden geactualiseerd en SLO is gevraagd dit te begeleiden. Hij gaat daarvoor regelmatig naar Suriname, om continuïteit te realiseren. ‘Leuke klus’, zegt hij. ‘Wij hebben daar wel ervaring mee, al had ik stiekem gehoopt dat ik eerst een paar maanden wat rustiger aan zou kunnen doen.’
Maar dat zat er niet in, want half juli is hij al voor zijn eerste bezoek vertrokken.

Het proefschrift is verkrijgbaar bij SLO en bij het Freudenthal Instituut. Wie meer wil weten over vermenigvuldigen met meercijferige getallen kan een exemplaar van het proefschrift bestellen (prijs € 25,00) via de webwinkel van het FI:
K. Buijs (2008): *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
(*www.fi.uu.nl/publicaties/webwinkel/00955/welcome.html*)

Over de auteur

Joke Verbeek is redacteur van *Euclides* en docent wiskunde op het Arentheem College in Arnhem.
E-mailadres: *jokeverbeek@chello.nl*

‘Dyscalculie in discussie, deel 2’ is verschenen!

EEN AANBOD VOOR DE LEDEN VAN DE NVvW



[Jaap Vedder]

‘Discalculie in discussie, deel 2’ is half september toegezonden aan alle lezers van het tijdschrift ‘Volgens Bartjens …’ Dat is mede mogelijk gemaakt door een bijdrage van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap, dat daarmee het belang van een gezamenlijk ontwikkeld protocol ‘Ernstige Reken-Wiskundeproblemen en Dyscalculie’ (ERWD) nog eens onderstreept.
De Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs (NVORWO) wijst de leden van haar zustervereniging graag op deze publicatie.

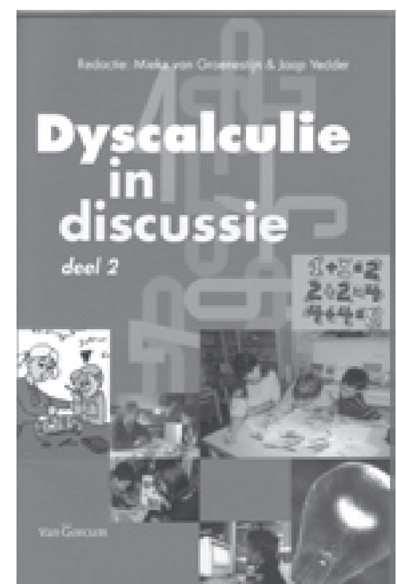
Leden van de NVvW kunnen dit boek per e-mail aanvragen bij de penningmeester van de NVORWO (*penningmeester@nvorwo.nl*) voor de prijs van € 9,50 (inclusief verzendkosten; de winkelprijs is € 12,50).

De publicatie is het vervolg op het twee jaar geleden verschenen boek ‘Dyscalculie in discussie’ (onder redactie van Maarten Dolk en Mieke van Groenestijn). Deze publicatie trok veel meer belangstelling dan op voorhand verwacht werd en is inmiddels herdrukt. De artikelen waren vooral bedoeld als een eerste verkenning van de problematiek en om de discussie te starten. Dat is gelukt!

Het Ministerie van OCW gaf de NVORWO eind 2006 een subsidie om een vervolgdiscussie te organiseren, liefst uitmondend in een aanpak om te komen tot een protocol voor de integrale aanpak van ernstige rekenproblemen en dyscalculie. Gestreefd moest worden naar draagvlak voor zo’n protocol. Citaat uit de aanvraag voor deze subsidie:
In het algemeen wordt te ruimomgesprongen met de diagnose dyscalculie. Voorkomen moet worden dat dyscalculie de vorm van een hype gaat aannemen. Het is belangrijk dat er een goede werkdefinitie afgesproken wordt en dat kan alleen als alle betrokkenen bij één platform aangesloten zijn. Onderkenning, verklaring, het kiezen van een aanpak van de problemen en de evaluatie van het effect van die aanpak zijn enkele van de stappen die te onderscheiden zijn in het totale proces van diagnostiek en interventie, van eerste signalering tot en met de nazorg en follow up. Bij een wildgroei van testen die leiden tot dyscalculie-verklaringen, is niemand gebaat.

De publicatie met als titel ‘Dyscalculie in discussie, deel 2’ (onder redactie van Mieke van Groenestijn en Jaap Vedder; isbn 978 90 232 4440 0) doet allereerst verslag van de werkconferentie van 5 juni 2007. De lezingen van Wied Ruijssenaars en Hans van Luit zijn te vinden in de hoofdstukken 1 en 2. Het verslag van de werkconferentie staat in hoofdstuk 3. Tenslotte geeft hoofdstuk 4 in kort bestek weer hoe het projectplan voor de ontwikkeling van het protocol ERWD eruit ziet. Dat hoofdstuk is tevens de werkagenda voor de periode tot voorjaar 2010. Het project is inmiddels toegekend door het Ministerie van OCW.

Informatie
Meer informatie over de projectwerkzaamheden is te vinden op de website van de NVORWO (*www.nvorwo.nl*).
Mieke van Groenestijn is bestuurslid van NVORWO en projectleider van het project ERWD.
Jaap Vedder is voorzitter van NVORWO en voorzitter van de stuurgroep ERWD.



Eindelijk tijd voor iets extra's...

[Juliette Karrer]

Juliette Karrer was een van de deelnemers aan het Sageproject en doet in onderstaand artikel verslag van haar bevindingen. Als zij-instromer, vanuit de automatisering het onderwijs binnen komend, had ze in het begin van haar docentencarrière haar handen vol aan haar klassenmanagement. Toen ze na een aantal jaren ervaring zich ging verdiepen in de mogelijkheden van het gebruik van ICT in de klas, bleek er tijdwinst te boeken tijdens de les. En ondanks de tijd die je moet investeren om mee te doen aan zoiets als het Sageproject, raadt ze het iedereen aan omdat het je kennis als professional verbreedt.

Inleiding

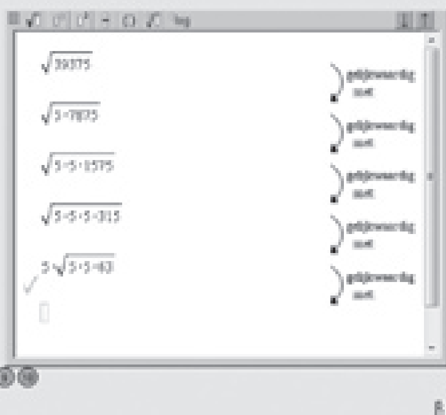
Sinds november 2004 ben ik werkzaam in het onderwijs. In het bezit van mijn eerstegraadsbevoegdheid ging ik meteen fulltime voor de klas. Dat was behoorlijk afzien: sinds mijn stages (in 1983) was er wel het één en ander veranderd. Vooral mijn klassenmanagement was niet bepaald om over naar huis te schrijven. De eerste jaren in het onderwijs waren tropenjaren. Ik was al blij als ik mijn zaakjes redelijk op orde had, voor extra's had ik geen tijd. Toen in 2007 een oproep kwam om te participeren in een project dat iets deed met ICT in de klas, had ik net het gevoel dat ik wat meer ruimte begon te krijgen. En bovendien zou ik in 2007-2008 een lokaal met een smartboard krijgen. Dus ik zag mogelijkheden om iets aan horizonverbreding te doen, ook al had ik nog geen ervaring met ICT in de klas.
In september 2007 startte het SAGE project, een gemeenschappelijk project van het St. Michaël College en het Freudenthal Instituut, waarin ik samen met in totaal zeven docenten van zeven scholen deel nam. SAGE staat voor Scorm Applet Generator. Een applet is een klein, zelfstandig programma. Als een leerling dit programma start, maakt de applet een van te voren bepaald aantal opgaven, waarbij de getallen telkens anders zijn. Dit betekent dat een dergelijk programma 'eindeloos' veel oefeningen kan genereren, waarmee een leerling een specifieke vaardigheid flink kan inoefenen.
De SCORM Applet Generator bestond bij het begin van het project al, en is op basis van gebruikerswensen verder uitgebreid. Een aantal collega's in het project hadden al meer ervaring met ICT in de klas. Ik heb dan ook dankbaar gebruik kunnen maken van hun ervaring en expertise. Gezien mijn automatiseringsachtergrond had ik gelukkig ook nog wat toegevoegde waarde.

Faciliteiten op school in relatie tot het project

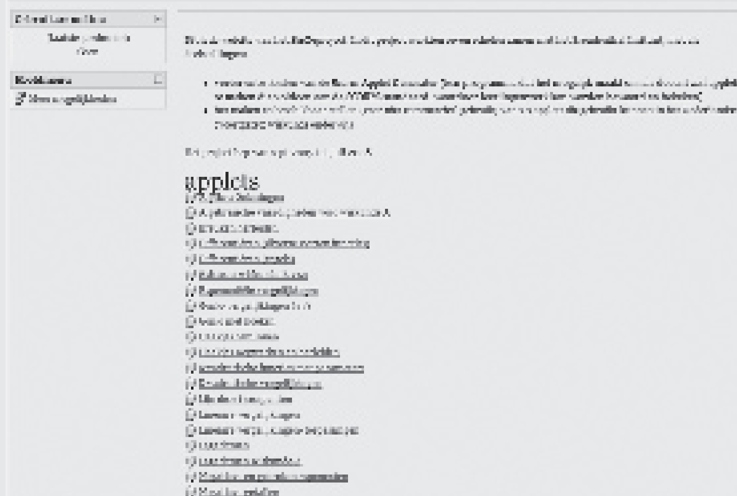
Zoals gezegd, de deelnemers van het project vormden een gemengd gezelschap: een aantal had nog nooit iets met ICT in de klas gedaan, anderen gebruikten het regelmatig, oude rotten in het onderwijs en relatieve nieuwkomers. Deze mix van deelnemers leverde regelmatig interessante discussies op. Het was te verwachten dat ex-deelnemers aan het Galois project [1] een duidelijk voorsprong hadden op de overige deelnemers. Dit voordeel lag niet alleen in het maken van applets, maar ook in de beschikbare faciliteiten. Het ICT-beleid van sommige scholen is bijvoorbeeld zo gericht op bescherming van de eigen infrastructuur, dat een docent tijdens een lessituatie wel een applet kan laten zien, maar bij het ontdekken van een fout in de applet deze niet kan aanpassen. Dit is een groot nadeel omdat je per slot van rekening bezig bent met een vorm van programmeren, dus fouten kun je niet voorkomen. Als je op school de applets niet kan verbeteren, beperkt dit het gebruik van de zelfbouw applets enorm. Als leerlingen thuis aan het werk zijn met een applet, dan haken ze af als een applet een overduidelijk correct antwoord afkeurt. Dat soort situaties is onwenselijk en wil je binnen een klas aan kunnen pakken.
Ideaal is natuurlijk de situatie dat je per leerling kunt beschikken over een pc of laptop, in combinatie met een smartboard in de klas. In die situatie kun je de applet klassikaal laten zien, eventuele vragen beantwoorden en vervolgens de leerlingen aan het werk zetten.

Gebruik in mijn les en thuis door mijn leerlingen: een applet 'wortels herleiden'

Gelukkig had (heb) ik een smartboard, en een Elektronische Leer Omgeving, ELO, namelijk Teletop. Ik heb zelfgemaakte applets op Teletop gezet, en aan leerlingen gedemonstreerd. We hadden vorig jaar nog niet de beschikking over laptops in de klas waardoor ik leerlingen in de klas nog niet met applets aan het werk kon zetten.
Mijn eerste experiment met een relatief simpele applet, waarmee leerlingen konden oefenen in het ontbinden van factoren, was ergens in januari 2008. Heel simpel, ze moesten bijvoorbeeld ontdekken dat 12 gelijk is aan $2 \times 2 \times 3$, zodat ze $\sqrt{12}$ konden herschrijven als $2\sqrt{3}$. Ik merkte in de klas dat leerlingen niet echt wisten hoe ze het gestructureerd moesten aanpakken. Dit was niet de eerste applet die ik maakte, maar wel de eerste waarbij ik een concrete lessituatie voor ogen had, en daarmee ook de eerste waarbij ik belang begon te krijgen in uitzoeken hoe ik de applet op Teletop kon zetten. Dat is best lastig, als je nog niet eerder met deze functionaliteit van een ELO hebt gewerkt. Het voordeel van het beschikbaar stellen van een applet via de ELO was natuurlijk dat leerlingen daar ook thuis mee aan de slag konden gaan. Voor mij was het noodzakelijk omdat de leerlingen er in de klas nauwelijks mee konden werken.
Ik liep toen tegen een interessant fenomeen aan: ik had de applet niet als huiswerk opgegeven aangezien het als iets extra's bedoeld was om een vaardigheid in te oefenen en omdat niet alle leerlingen regelmatig gebruik maakten van Teletop. En wat bleek? Juist de zwakkere leerlingen die ik graag de applet had zien gebruiken, hebben de applet niet gebruikt. En de goede tot zeer goede leerlingen die het eigenlijk niet nodig hadden, zijn juist wel met plezier aan de gang gegaan om iets extra te oefenen dat ze eigenlijk al goed konden.
Het nadeel van deze applet was dat de leerlingen alleen oefenden met het ontbinden in factoren, en in de applet geen wortels herschreven; het was de bedoeling dat ze de stap van deze oefening naar het herleiden van wortels zelf zouden maken. Dat bleek niet evident voor leerlingen en dus paste ik de applet opnieuw aan.



figuur 1 Wortels herleiden



figuur 3 Beschikbare SAGE-scorm's

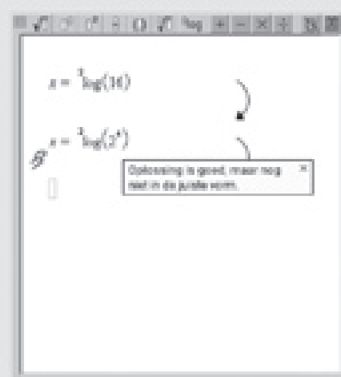
In het beginstadium waren er ook nog wat problemen met het gebruik van de applets in Teletop. Allereerst lukte het me niet, door gebrek aan kennis, om de applet in Teletop te krijgen en naderhand bleek de applet niet helemaal te werken zoals ik dat verwachtte: een applet zou het werk van een leerling moeten bewaren, zodat hij zijn werk op een later tijdstip zou kunnen voortzetten. Helaas functioneerde dit niet in het begin waardoor leerlingen danig gedemotiveerd raakten. Overigens: toen ik dit probleem bij Teletop meldde, had ik binnen 24 uur een reactie; zij gaven aan deze bug op te gaan lossen. Op dit moment werkt het naar behoren, wat betekent dat ik met een geruster hart de leerlingen kan verwijzen naar het extra oefenmateriaal in Teletop.

Het ontwerp van de volgende applet: 'logaritmen'

Na deze oefening diende zich al snel een nieuwe uitdaging aan: logaritmen. Lastige stof voor leerlingen, aanvullende oefenstof op het boek leek me wel zo handig. Bovendien kreeg ik zelf behoefte om wat meer te experimenteren met de begeleidende tekst bij een applet. Want bij het eerste klassenexperiment kregen de leerlingen steeds dezelfde tekst, terwijl de mogelijkheid bestaat om de tekst per opgave aan te passen. Bij de eerste opgave de theorie uitleggen, daarna wat kortere tekst met een hint, en vervolgens het saaie 'los op'. Deze opzet leverde een aantal interessante discussies op tijdens de projectbijeenkomsten. Is de applet bedoeld om de lesstof te vervangen? Of wil je alleen kale oefeningen bieden? Het bleek dat een ieder binnen het project hier zo zijn/haar eigen ideeën over had. Uiteindelijk is de conclusie dat hierin de waarheid niet bestaat: het doel dat jou voor ogen staat bij het maken van een applet is bij zelfbouw natuurlijk voor jou de meest geschikte. Een ander onderwerp waarop we elkaar in de projectgroep bruikbare feedback konden geven, is de snelheid waarmee je de opgaven moeilijker maakt. Te veel makkelijke opgaven is demotiverend, maar te snel moeilijke opgaven ook. Het vinden van een evenwicht hierin was voor ons allen een lastige opgave. Ook de neiging om maar alles in één applet te stoppen moest ik zelf sterk onderdrukken. Want het was o zo makkelijk om de sommen van de applet wortels herleiden ook te gebruiken bij de logaritmen. Per slot helpt het leerlingen als ze zien dat $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. En dat stuk had ik toch net al gemaakt. Zo groeide en kromp de applet tot wat hij uiteindelijk geworden is: toch maar zonder de mogelijkheid om getallen te ontbinden.

Terugblik op een jaartje iets extra's

Hoewel ik in de loop van het afgelopen jaar ondervond dat het toch een drukke baan blijft, is het meedoen in een project dat je kennis als professional verbreedt een echte aanrader. Ik leerde veel van de projectbijeenkomsten, en dan heb ik het niet alleen over de applets. Ook al kostte het project mij tijd (uiteraard), het was ook een grote motivator. De eerlijkheid gebiedt me te zeggen dat in tijden van toetsblokken mijn inspanningen voor het project wat inzakten, om vervolgens op te veren op het moment dat er weer een projectbijeenkomst aan kwam. Tijdens de laatste bijeenkomt van het SAGE project hebben we de 20 applets gekozen waarvan we vonden dat deze gepubliceerd konden worden. Het SAGE project is in juli 2008 afgesloten met het publiceren van deze 20 applets binnen



figuur 2 Logaritmen

de algebra leerlijn op *www.sageproject.nl*. De applets zijn ook beschikbaar via DWO, de digitale wiskunde oefenomgeving van het FI.
Dit jaar heeft onze sectie de beschikking over (wiskunde) laptops voor gebruik in de klas en hoop ik de SAGE- en andere applets als extra oefenmateriaal te kunnen gaan gebruiken in de les zelf. Misschien dat ik u later nog op de hoogte van die ervaringen kan brengen.

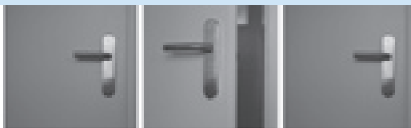
Meer informatie over SAGE, Applet en DWO?
Via de site van WisWeb is meer informatie beschikbaar over DWO, WisWeb+abonnement en applets. Het Freudenthal Instituut biedt een cursus aan om als docent zelf applets te maken.
Zie ook *www.fi.uu.nl/nl* en kies 'voortgezet onderwijs' en 'professionalisering'.

Noot

[1] Het *Galois*-project (Geïntegreerde Algebraïsche LeerOmgeving In School) is een project uit 2006-2007, waarbinnen onder andere het prototype van de SAGE-generator is ontwikkeld. Meer informatie is te vinden in de folder 'Het Galois project, naar een wiskundige leeromgeving' uit september 2007. De auteurs zijn Christian Bokhove en Gerard Koolstra van het St. Michaël College (Zaandam), Peter Boon van het FIsme (Universiteit Utrecht) en André Heck van het AMSTEL Instituut (Universiteit van Amsterdam).

Over de auteur
Juliette Karrer is sinds 2005 docent wiskunde op het Ashram College in Alphen aan den Rijn. In 2004 stapte zij over vanuit het bedrijfsleven (ICT).
E-mailadres: *j.karrer@ashram.nl*

Correspondentie n.a.v. het artikel 'Alwéér die drie deuren?'



[Rob Flohr en Jan van de Craats]

Redactioneel
In de *Euclides*-special Statistiek en Kansrekening van februari 2008, stond een bijdrage van Jan van de Craats over de klassieker *het driedeurenprobleem*. Als inleiding bij dit artikel stond: 'Je ziet het op allerlei plaatsen opduiken, en telkens leidt het weer tot heftige discussies. Ook in de klas zal het zijn uitwerking niet missen. Leuk voor een spannend project kansrekening, vooral als je de simpele oplossing hieronder pas achteraf geeft, nadat alle stofwolken zijn opgetrokken'.
Rob Flohr vond nog wat achtergebleven stof en schreef hierover een e-mail naar Jan van de Craats. Het doet de redactie deugd om te merken dat *Euclides* met een scherpe en kritische blik gelezen wordt en dat lezers de moeite nemen om te reageren. Ter stimulans tot het positief kritisch lezen van elkaars geschriften, vindt u hieronder de gevoerde correspondentie tussen de genoemde personen, uiteraard met hun instemming.

Rob Flohr:
Geachte heer Van de Craats,
Graag wil ik reageren op uw artikel 'Alwéér die drie deuren' in *Euclides* 4 (februari 2008), pp. 171-172.
Het betreft uw opmerking op bladzijde 172 dat ingeval van vier deuren en het openen van één deur door de quizmaster, de kans op de prijs door te wisselen van een kwart naar een half stijgt. Zelf kom ik uit op een stijgingsfactor van anderhalf in plaats van twee. Dit heeft volgens mij te maken met het feit dat in deze specifieke situatie één deur buiten spel blijft.
Mijn redenering is als volgt: de kans dat de prijs niet achter de deur staat die de kandidaat in eerste instantie heeft aangewezen, (stel deur 1) is 3/4. Stel dat de quizmaster deur 2 opent, dan is de kans dat de prijs achter deur 3 of deur 4 staat, gelijk aan 3/4. Dus de kans dat die achter deur 3 staat is dan 3/8, evenals de kans dat de prijs achter deur 4 staat. De kans door te wisselen wordt dan met een factor anderhalf vermenigvuldigd en niet met een factor twee (stijgt van 1/4 naar 3/8).
Ook met een kansboom kom ik tot hetzelfde resultaat. Als ik het probeer te vertalen naar wat u de triviale variant noemt, dan zou ik zeggen: je mag twee van de nog niet gekozen deuren openen, maar er zijn in dit geval wel drie nog niet gekozen deuren over. Dat is 2/3, dus wordt je kans vergroot met een factor 3/2.
Graag zie ik uw reactie tegemoet.
Bij voorbaat dank, en met vriendelijke groet,
drs. Rob Flohr

Jan van de Craats:
Geachte heer Flohr,
Dank voor uw mail. Ik buig deemoedig het hoofd: u heeft gelijk. Het zou leuk zijn als u uw reactie ook naar *Euclides* stuurt. Ze zullen het wel op willen nemen. Deze mail mag er wat mij betreft ook bij.
Met hartelijke groeten,
Jan

Over de auteurs
Rob Flohr is docent wiskunde en statistiek aan de Stenden Hogeschool Leeuwarden (voorheen Christelijke Hogeschool Nederland).
E-mailadres: *flohr028@planet.nl*
Prof.dr. Jan van de Craats is hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en aan de Open Universiteit.
E-mailadres: *J.vandeCraats@uva.nl*

Vanuit de oude doos

MCMXXVII

[Ton Lecluse]

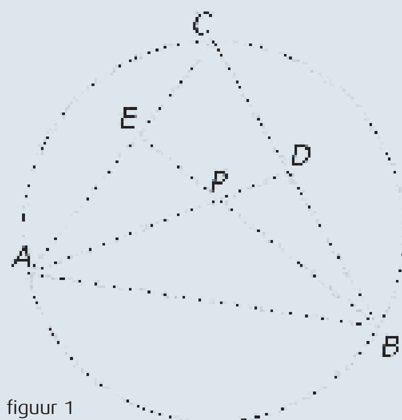
Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In deze rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!

Cirkelboog?

Uit één van de toelatingsexamens tot de universiteiten van 1927 komt de volgende opgave.

In een cirkel is een koorde *BC* getrokken, die een boog van 120° onderspant. Op de grootste boog neemt men een beweeglijk punt *A*. De hoogtelijn *BE* en bissectrix *AD* van driehoek *ABC* snijden elkaar in *P*. Bewijs dat de meetkundige plaats van *P* ook een cirkelboog is en bereken de straal van de bijbehorende cirkel als *BC* = *a* is.

We maken de basistekening: ***figuur 1***.

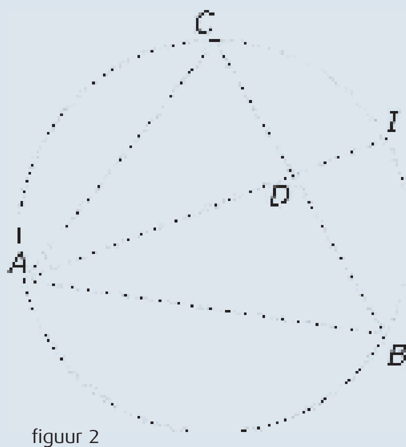


figuur 1

Wanneer je deze tekening maakt met een dynamisch computerprogramma en je sleept punt *A*, dan zie je inderdaad dat *P* een cirkeldeel doorloopt. Maar het blijft vooralsnog geheimzinnig hoe je die cirkel expliciet in deze tekening moet plaatsen. In de recente schoolboeken tref je wel opgaven aan die hierop lijken. Dan is *P* bijvoorbeeld het snijpunt van de zwaartelijnen van driehoek *ABC* of van de hoogtelijnen, deellijnen of middelloodlijnen.

Telkens doorloopt *P* een cirkel wanneer je één van de hoekpunten van driehoek *ABC* sleept (en de andere twee hoekpunten op hun plaats laat).
Maar nu is de situatie echt anders: *P* is snijpunt van een hoogtelijn en een deellijn, en wat heeft die 120° er nu mee te maken? Wordt de opgave echt anders wanneer je hiervoor een andere waarde neemt? (Het antwoord hierop is: 'nee'. Hierover straks meer.)
Wellicht wilt u eerst eens zelf proberen de opgave op te lossen. Pas daarna moet u verder lezen onder de streep.

Het is u mogelijk opgevallen dat de figuur kan ontstaan uit een gelijkzijdige driehoek *ABC* met omgeschreven cirkel. Houd dan de cirkel en *BC* vast, en ga *A* slepen over deze cirkel, enzovoort.
Een bekende situatie krijgt u wanneer u dan uit het variabele punt *A* de deellijn trekt die de cirkel snijdt in *I*. Omdat $\angle BAI = \angle CAI$ is, is *I* het midden van boog *BC*, dus wanneer u *A* sleept, blijft *I* op zijn plaats (***zie figuur 2***).

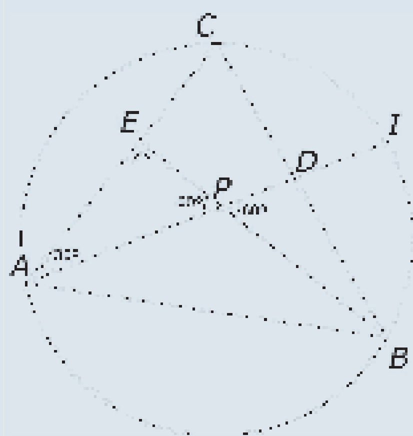


figuur 2

Wellicht dat deze aanwijzing u verder helpt het probleem te doorgronden. Wilt u nu zelf proberen de opgave op te lossen, lees daarna dan verder onder de streep.

Nu moeten we gebruik zien te maken van het gegeven dat $\angle BEA = 90°$.
Aangezien omtrekshoek *BAC* op een boog van 120° staat, geldt:
$\angle BAC = \frac{1}{2} bg(BC) = 60°$
We kunnen nu een aantal hoeken uitrekenen.
Wellicht dat deze aanwijzing u verder helpt het probleem te doorgronden. Als u nu zelf wilt proberen de opgave op te lossen, dan moet u daarna pas verder lezen onder de streep.

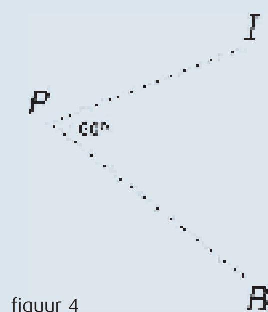
In figuur 3 is beredeneerd dat $\angle BPI = 60°$
Hierbij is gebruik gemaakt van de hoekensom van een driehoek (driehoek *APE*) en overstaande hoeken (in het punt *P*).



figuur 3

Nu kan beantwoord worden welke cirkel door het punt *P* wordt doorlopen.
Mogelijk dat deze aanwijzing u verder helpt het probleem te doorgronden. Zelf proberen de opgave op te lossen? Lees daarna dan verder onder de streep.

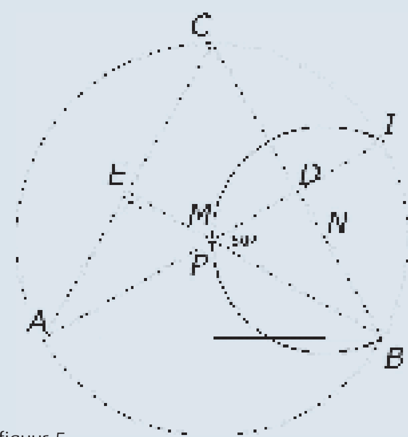
Het enige relevante van de vorige tekening staat ***in figuur 4***.



figuur 4

Hierin liggen de punten B en I vast en doorloopt P een curve, waarbij $\angle BPI = 60°$ blijft. De bekende stelling 'hoeken op dezelfde cirkelboog' zegt dan, dat punt P een cirkelboog doorloopt waarvan B en I eindpunten zijn.
De cirkel waarvan deze boog deel uitmaakt, is dus de omgeschreven cirkel van driehoek BPI.
Wellicht dat deze aanwijzing u verder helpt het probleem te doorgronden. Weer eerst zelf proberen de opgave op te lossen? Lees dan pas verder onder de streep.

Het middelpunt M van de gegeven cirkel is een handige keuze voor P, immers ook $\angle BMI = bg(BI) = 60°$.
De eindfiguur staat ***in figuur 5***.



figuur 5

In deze figuur is driehoek ABC gelijkzijdig, valt P met M samen en is N het middelpunt van de cirkel die door P (gedeeltelijk) wordt doorlopen.

En nu nog *a*!

Resteert de vraag de cirkelstraal te bepalen wanneer $BC = a$ is.
Wellicht wilt u nu zelf proberen de opgave op te lossen. Pas daarna moet u verder lezen onder de streep.

Driehoek ABC is gelijkzijdig met zijden a, dus $BE = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.
ME is (onder andere) zwaartelijn, dus $BM = \frac{2}{3}BE = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.
Hieruit volgt dat je de straal van de omgeschreven cirkel van een gelijkzijdige driehoek met zijden a krijgt door deze te vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.
Ook driehoek MBI is gelijkzijdig, met zijde $BM = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$; dus is de straal van de P-cirkel gelijk aan $\frac{1}{3}a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}a$ (en daarmee is $BN = \frac{1}{3}BC$).

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Comenius College te Hilversum.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

In memoriam Jan Sloff

[Anne van Streun]

Op 3 oktober 2008 is Jan Sloff overleden op de leeftijd van 83 jaar. Op de rouwkaart staat: *Hij was een mens zonder franje. Altijd bezig met wetenschap, cultuur en natuur. Openstaand voor een ontmoeting met hen die op zijn pad kwamen.* Een treffende karakterisering van een uniek mens. Flexibel en breed, in staat om in een gesprek vele keren van onderwerp te wisselen. Het is passend om hem ook in *Euclides* te gedenken.
Honderden wiskundeleraren kennen hem. Als wiskundedidacticus van de Noordelijke Leergangen (MO-A en MO-B) en van de Rijksuniversiteit Groningen. Als lid van de landelijke examencommissies voor tal van akten, als auteur van het eerste boek voor statistiek en kansrekening van Wolters-Noordhoff enzovoort. Altijd bezig, altijd aanwezig, altijd geïnteresseerd in nieuwe ontwikkelingen en ideeën.
Omstreeks 1978 liet ik een paar natuurkundedoctorandussen bij hem hospiteren. (In die tijd bestonden de natuurkundelessen nog uit frontale verhalen en demonstraties.) Na twee weken kwamen ze ontsteld bij mij langs. 'Daar in Stadskanaal wordt geen les gegeven! Wat moeten we daar?' Zelfstandig leren avant la lettre. Jan was geen systeembouwer, maar wel een kritisch meedenker. Zodra we in Groningen weer eens een nieuw didactiekprogramma hadden vastgesteld, kwam Jan een dag later aan met omissies en amendementen. Of hij kwam op een overvolle werkdag binnen wandelen met weer een nieuw wiskundig probleempje, dat we eerst maar eens moesten oplossen. En die voorraad aan problemen was eindeloos. Evenals de anekdotes die anderen over hem vertellen. Zijn leerlingen, zijn studenten en zijn collega's zullen zich hem vooral herinneren als een warm en meelevend mens, die hen nooit liet vallen.

Oproep / Schoolboekvervangende materialen gevraagd

[Hans Hensen]

Op internet circuleert al divers digitaal lesmateriaal, door docenten samengesteld en gedeeld. Vaak heel waardevol materiaal, maar meestal zijn het losse opdrachten en lesideeën, (digitale) uitstapjes naast de reguliere les. Er zijn echter ook complete leslijnen door docenten geschreven, maar die zitten nu veelal verborgen achter de schooldeuren. Zo'n leslijn gratis beschikbaar stellen, zie je nog niet.

Het Ruud de Moor Centrum van de Open Universiteit is gestart met een inventarisatie naar kerndoeldekkende leermaterialen die onder voorwaarden beschikbaar kunnen komen als open content, zodat leslijnen niet alleen beschikbaar zijn in de vorm van gratis schoolboeken, maar ook als gratis digitaal lesmateriaal. Sinds de start van de inventarisatie in augustus is al een twaalftal complete leslijnen voor onder meer natuurkunde, scheikunde en biologie (onderbouw én bovenbouw) door leraren vrijgegeven.

Het is de bedoeling om compleet digitaal leermateriaal beschikbaar te hebben voor alle leerjaren en schoolsoorten. Dat heeft z'n tijd nodig, en dat kan niet zonder hulp van u als docenten. De voordelen zijn legio: In een databank met open content kunnen leraren bijvoorbeeld de leslijnen bekijken en actualiseren of bewerken naar eigen inzicht. Docenten kunnen kiezen of ze het materiaal digitaal of in geprinte vorm aanbieden aan de leerlingen. De kostenbesparing voor scholen en ouders lijkt ons evident.
Het beschikbaar stellen van die leslijnen betekent niet dat ze een positieve kwaliteitsbeoordeling door het Ruud de Moor Centrum krijgen. Het Ruud de Moor Centrum biedt aan de ontwikkelaars van deze leslijnen en aan de docenten die ze in hun klassen gaan gebruiken via zijn kennisbanken (wiskunde, economie, natuurkunde, scheikunde en biologie) wel de mogelijkheid zich (verder) te professionaliseren.

Leraren die met zelfgemaakte leslijnen of delen daarvan werken, worden verzocht dit door te geven op het volgende mailadres: *hans.hensen@ou.nl*.
Ook auteurs van schoolboeken die niet meer op de markt zijn, kunnen hun werk aanbieden. Het Ruud de Moor Centrum zoekt vervolgens uit of de auteursrechten van deze methodes weer teruggegeven kunnen worden aan de auteurs. Het onderzoekt vervolgens met auteurshebbende de mogelijkheden om het materiaal (via de databank) beschikbaar te maken voor al het onderwijspersoneel.
Mocht u eigen schoolboek vervangend materiaal hebben gemaakt of werkt u met eigen schoolboek vervangend materiaal geef dat dan door aan *hans.hensen@ou.nl.* Wij nemen dan contact met u op.

Contactadres
J.G. Hensen, Siriusstraat 58, 1223AP Hilversum, tel. 035 6851602

Oproep / Wie wil het Wereldwiskunde Fonds komen helpen?

[Juliëtte Feitsma]

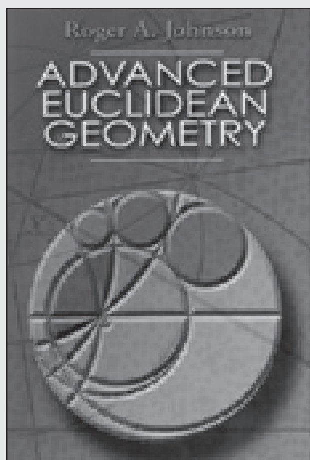
Het Wereldwiskunde Fonds (WwF) steunt financieel projecten op het gebied van wiskundeonderwijs in de Derde Wereld. Een recent voorbeeld is een project in Zebilla in Ghana. Daar konden van het geld van het WwF 450 boeken en 175 rekenmachines worden aangeschaft. Ze liggen inmiddels in de geïmproviseerde bibliotheek van de school, waar alle 750 leerlingen van de school de boeken kunnen lenen voor gebruik. De meeste leerlingen hebben geen geld voor het kopen van boeken, waardoor ze zich moeten beperken tot het oefenen van opgaven overgeschreven van het schoolbord.

Het WwF valt als werkgroep onder de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De werkgroep, die het geld beheert en de projecten goedkeurt, bestaat momenteel uit vijf leden, van wie in elk geval één zijn werkzaamheden voor het WwF over een jaar gaat beëindigen.

Wij hebben daarom dringend nieuwe leden nodig!
We vergaderen drie keer per jaar. De contacten tussen de leden van de werkgroep onderling verlopen daarnaast meestal via e-mail. Na goedkeuring van een project wordt het aan een van de leden toegewezen die dan af en toe e-mailt met de contactpersoon van het project.

Ook staan we tijdens de jaarvergadering van de NVvW met tweedehands wiskundeboeken op de boekenmarkt.
Voor meer informatie over het WwF zie de website (*www.nvvw.nl*) onder Werkgroepen. Doorklikken naar de internetveiling biedt ook toegang tot overzichten van diverse WwF-projecten.
Als je ervoor voelt om de werkgroep te komen versterken of als je meer informatie wilt, neem dan contact op met:
Juliëtte Feitsma, It Rak 5, 8701 LG Bolsward.
E-mailadres: *juliettefeitsma@kpnplanet.nl*

Verschenen /

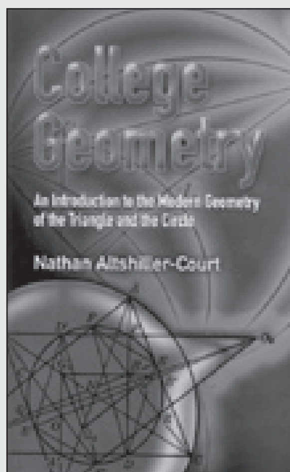


Advanced Euclidian Geometry

Auteur: Roger A. Johnson
Uitgever: Dover Publications, Inc. (heruitgave 2007; eerder uitgegeven in 1929)
ISBN: 9780 4864 62370
Prijs: € 10,50 (318 pagina's, ingenaaid)

Van de achterkant – For many years, this elementary treatise on advanced geometry has been the standard textbook in this area of classical mathematics; no other book has covered the subject quite as well. It explores the geometry of the triangle an the circle, concentrating on extensions of Euclidean theory, and examining in detail many relatively recent theorems.

Verschenen /

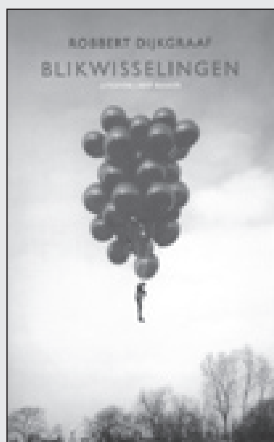


College Geometry

Ondertitel: An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle
Auteur: Nathan Altshiller-Court
Uitgever: Dover Publications, Inc. (heruitgave 2007; eerder uitgegeven in 1952)
ISBN: 9780 4864 58052
Prijs: € 16,00 (313 pagina's, ingenaaid)

Van de achterkant – Translated in many languages, this book was in continuous use as the standard university-level text for a quarter-century, until it was revised and enlarged by the author in 1952. (…)
The first part of the text stresses construction problems, proceeding to surveys of similitude and homothecy, properties of the triangle and the quadrilateral, and harmonic division. Subsequent chapters explore the geometry of the circle – including inverse points, orthogonals, coaxals, and the problem of Apollonius – and triangle geometry (…).

Verschenen /



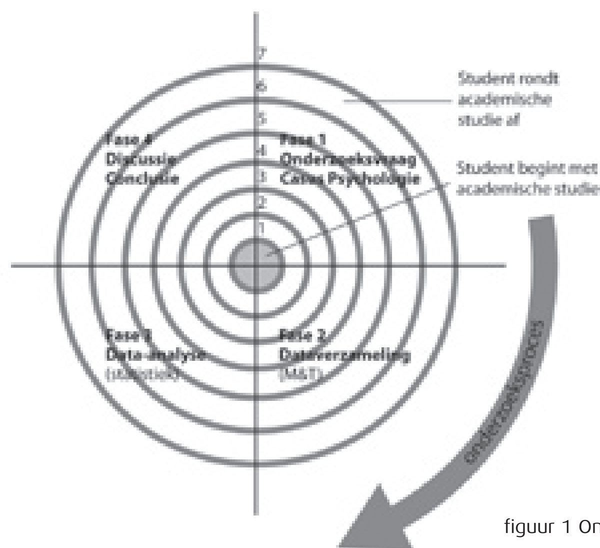
Blikwisselingen

Auteur: Robbert Dijkgraaf
Uitgever: Bert Bakker, Amsterdam (2008)
ISBN: 978 90 351 3336 5
Prijs: € 19,95

Van de achterkant – Robbert Dijkgraaf schuwt de 'grote vragen' niet. Zit er een systeem in de wereld? Zijn wij alleen in het heelal, wordt de jeugd slimmer, leven we in een groot computerprogramma en waarom zien sommigen van ons letter en cijfers in kleur? En trouwens, kun je een dichtbundel schrijven met honderdduizend miljard gedichten? Door vanuit verschillende invalshoeken naar het vertrouwde te kijken ontstaan vaak nieuwe inzichten in de wetenschap. Gewapend met die allernieuwste inzichten laat Robbert Dijkgraaf in Blikwisselingen verbindingen zien tussen wetenschap, kunst, onderwijs en politiek.
Het boek is gebaseerd op stukken die eerder zijn verschenen in NRC Handelsblad, de Academische Boekengids en de Groene Amsterdammer.
Robbert Dijkgraaf is hoogleraar mathematische fysica aan de Universiteit van Amsterdam en vanaf mei 2008 president van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen.

Boekbespreking / Van vakgericht naar competentiegericht statistiekonderwijs

[Arthur Bakker en Adri Dierdorp]



figuur 1 Onderzoekscompetentiecirkel

Ondertitel: Een interventiestudie in een opleiding psychologie
Proefschrift Open Universiteit Nederland, Heerlen
Auteur: H. van Buuren
Uitgever: Open Universiteit, Heerlen (2008)
ISBN: 9789035808171
205 pagina's

Het statistiekonderwijs staat weer volop in de belangstelling. In februari besteedde Euclides er nog een themanummer aan, in april werd statistiek naar de buitenring van de wiskunde verbannen en in juni lag er een nieuw proefschrift over statistiekonderwijs. Het verschijnen van een proefschrift over statistiekonderwijs is geen dagelijks verschijnsel. De International Association for Statistical Education (IASE) meldt voor Nederland sinds 2000 maar vier proefschriften over dit onderwerp. Het laatste daarvan, dat van Hans van Buuren, behandelt de overgang van vakgericht naar competentiegericht statistiekonderwijs binnen de opleiding psychologie aan de Open Universiteit Nederland. In deze recensie vatten we eerst Van Buurens onderzoek samen. In de reflectie gaan we in op de vraag wat we hiervan in het voortgezet en beroepsonderwijs kunnen leren.

Samenvatting

Problemen in het statistiekonderwijs

Onderzoek naar statistiekonderwijs op universiteiten en hogescholen rapporteert dat studenten hardnekkige problemen hebben met het leren en toepassen van statistiek. Van Buuren bespreekt drie mogelijke verklaringen. De eerste verklaring ligt bij de studenten zelf. Ze hebben vaak een gebrekkige voorkennis, maar ook factoren als een negatieve houding tegenover statistiek ('sadistics'), angst, geringe motivatie en weinig zelfvertrouwen spelen een belangrijke rol. De tweede verklaring is gelegen in de inhoud van het vak en de gebruikte didactiek. Vaak wordt het vak statistiek onderwezen als een serie losstaande technieken, zeker als het een hulpdiscipline is bij andere vakken (zoals psychologie). De derde verklaring is de positionering van het vak statistiek binnen opleidingen. Binnen de psychologieopleiding van de Open Universiteit waren er voorheen twee statistiekcursussen, een cursus SPSS (statistieksoftware) en drie cursussen over onderzoek doen. Statistiek werd voornamelijk in de beginfase van de studie gegeven en onderzoek doen was voor de hogere jaren. De studenten hadden daardoor moeite om statistiek toe te passen wanneer zij onderzoek leerden doen.

Gekozen oplossing: herontwerp

Van Buuren en zijn collega's hebben de oplossing voor deze problemen gezocht in een overgang van vakgericht naar competentiegericht statistiekonderwijs. De zes eerder genoemde cursussen zijn geïntegreerd in zes opeenvolgende onderzoekspractica. Het achterliggende idee is om studenten in een elektronische leeromgeving geïntegreerde onderzoekstaken in een doorlopende leer- en toepassingslijn aan te bieden, waardoor ze steeds weer worden uitgedaagd om een hele onderzoekscyclus (***zie figuur 1***) te doorlopen en verschillende psychologische onderzoekstaken uit te voeren. Deze cyclus vormt de rode draad van het curriculum. Studenten rapporteren daarbij in het gebruikelijke format van probleemstelling, theoretisch kader, onderzoeksmethoden, resultaten en discussie.

Van Buuren verwachtte dat studenten in deze leeromgeving op een natuurlijke wijze vertrouwd raakten met het toepassen van statistiek in een verscheidenheid aan psychologische contexten en de bijbehorende statistische technieken leerden selecteren en gebruiken. Met de onderzoekstaken beoogde hij verder ertoe bij te dragen dat studenten de betekenis van statistiek voor psychologisch onderzoek beter doorgrondden, dat hun motivatie voor het doen van onderzoek toenam en ze een positievere houding ten aanzien van statistiek ontwikkelden.
Voor het herontwerp maakte Van Buuren gebruik van onderwijskundige theorieën waaruit hij instructieaanwijzingen destilleerde. De meest belangrijkste richtlijnen zijn:

- het activeren van voorkennis;
- de studenten oriënteren op wat er geleerd wordt (gebruik van advance organizers);
- gelegenheid bieden tot oefenen;
- toepassen van statistiek in een langlopende leer- en toepassingslijn;
- het voorkomen van cognitieve overbelasting;
- het gebruik van verschillende authentieke onderzoeksvraagstukken.

Deelstudies

Het ontwerp van de onderzoekspractica is eerst in twee pilots getest. Beide pilots laten zien dat het herontwerp een veelbelovend alternatief is voor het traditionele statistiekonderwijs binnen de afdeling Psychologie. Studenten beoordelen de integratie van genoemde cursussen positief, lijken hun

angst voor statistiek te overwinnen en de elektronische leeromgeving stimuleert hen tot kritische discussies over de onderzoeksbevindingen. Ook lijken ze 'het grotere geheel' beter te overzien. De resultaten van de pilots vormden voldoende aanleiding om het herontwerp opleidingsbreed in te voeren. Uit de pilots kon echter niet worden opgemaakt of studenten ook meer begrip van de statistiek ontwikkelen dan in de traditionele aanpak van het statistiekonderwijs. Daartoe was nader onderzoek nodig.

In een cross-sectioneel onderzoek werden de resultaten van 340 studenten in de vakgerichte variant en van 128 studenten in de competentiegerichte variant vergeleken. Van Buuren moest zich daarbij beperken tot de evaluatie van het begin van de leerlijn. De onderzoeksresultaten bevestigen dat de competentiegerichte leeromgeving zich in de kennistest gunstig onderscheidt van de vakgerichte leeromgeving, hoewel de effecten bescheiden zijn. De gegevens wijzen erop dat in de vakgerichte benadering van het statistiekonderwijs de negatieve houding ten aanzien van de statistiek overheerst en dat weinig motivatie wordt opgewekt, terwijl in de competentiegerichte benadering gemotiveerder en diepgaander wordt gestudeerd en de negatieve houding wordt geneutraliseerd.

Naast het cross-sectioneel onderzoek heeft er ook een longitudinaal onderzoek plaatsgevonden om te onderzoeken of de resultaten duurzaam zijn. Studenten werden drie jaar later opnieuw bevraagd met de vragenlijst die ook in het cross-sectionele onderzoek was gebruikt. De competentiegerichte benadering onderscheidde zich weer gunstig van de vakgerichte leeromgeving, ook op kennisniveau, maar Van Buuren vindt de kennisresultaten in beide condities onvoldoende. Weer zijn de effecten bescheiden maar ze blijken wel duurzaam te zijn. Over het geheel genomen lijkt het herontwerp dus een verbetering te zijn.

Van Buuren merkt op dat de integratie van de statistiekvakken in onderzoekspractica een paradoxaal gevolg heeft voor de zichtbaarheid van de statistiek in het curriculum. Enerzijds is de statistiek meer verborgen omdat ze steeds ten dienste van onderzoek wordt aangeboden, en meer verspreid over de jaren van de bacheloropleiding. Anderzijds is de statistiek prominenter aanwezig omdat studenten de statistische technieken in elk practicum weer nodig hebben.

Reflecties

We hebben bewondering voor het werk dat Van Buuren verzet heeft. Dit is geen onderwijskundig onderzoek waarin een idee alleen is getest op proefpersonen zonder blijvende veranderingen in de praktijk, maar een doorgevoerde onderwijsvernieuwing die op veel punten een verbetering blijkt te zijn. Toegegeven, sommige resultaten zijn wat zacht of onduidelijk: in de deelstudies is alleen het begin van de leerlijn geëvalueerd en sommige aantallen waren wat klein voor het gebruik van bepaalde onderzoekstechnieken. En uiteraard had iedereen graag gezien dat ook de kennisresultaten veel beter waren geweest, maar kennelijk blijft het lastig om winst te boeken (of te meten) op kennistoetsen.

Het interessantste punt uit het proefschrift vinden wij dat het mogelijk blijkt in een competentiegericht herontwerp studenten een positiever beeld van de statistiek te geven, hoewel de resultaten op de kennistest tegen blijven vallen. Al met al lijkt het herontwerp toch winst te hebben opgeleverd. Voordat we hieruit concluderen dat ook andere opleidingen meer competentiegericht herontworpen moeten worden, moeten we wel bedenken hoeveel werk en verandering het herontwerp met zich heeft meegebracht. Een vrij klein team van docenten was bereid over de grenzen van hun eigen deelvakken heen te kijken en in de loop van vele jaren het onderwijs helemaal om te gooien. Dit vereiste dus goed teamwork en continuïteit van de staf. Binnen het beroepsonderwijs en kleine faculteiten lijkt een dergelijke stap haalbaar, maar in het voortgezet onderwijs is zo een herontwerp lastiger. Wel zien we binnen ANW en NLT pogingen om statistiek te onderwijzen ten dienste van andere vakken of algemene onderzoeksvaardigheden.

We vinden het regelmatig doorlopen van de onderzoekscyclus in figuur 1 een positief punt, waarvan we verwachten dat het ook een rode draad in het nieuwe lesmateriaal voor wiskunde A en C kan vormen. Vanwege de beperkte onderwijstijd moet de nadruk dan wel op de statistische technieken liggen, en niet te veel op de probleemstelling en dataverzameling.

Het proefschrift van Van Buuren roept de vraag op wat nu eigenlijk een geschikte positie voor het vak statistiek binnen het voortgezet onderwijs is. Veel statistici zien statistiek als een apart vak dat wel gebruikmaakt van wiskunde maar er geen onderdeel van is. Vooral in de Amerikaanse literatuur wordt hier veel aandacht aan besteed (Moore, 1992). Inderdaad heeft statistiek een heel andere oorsprong dan de wiskunde. Ze is immers grotendeels ontstaan uit Statenkunde en de natuurwetenschappen (Porter, 1986; Stamhuis, 1989; Stigler, 1986). Pas rond 1900 ontstond de mathematische statistiek en sommige grafische representaties zoals de boxplot stammen pas uit de jaren zeventig (Tukey, 1977). Historisch is het wiskundeonderwijs in de meeste landen zo gegroeid dat statistiek erin werd opgenomen.

In Engeland zijn vriend en vijand het erover eens dat statistiek belangrijk is voor burgerschap, studie en beroep, maar er is een verhit debat gaande over de positie van het statistiekonderwijs. Sommigen (bijvoorbeeld Smith, 2004) adviseren om statistiek uit het wiskundeprogramma te halen en het onder te brengen bij vakken als biologie en aardrijkskunde waarin statistiek vooral als hulpdiscipline kan fungeren. Dit advies heeft tot veel protest geleid, want biologie- en aardrijkskundeleraren voelen zich niet competent om statistiek te geven en vrezen terecht dat er tijd van hun eigen vakken af gaat.

De Royal Statistical Society (RSS) heeft de protesten gebundeld en enkele tegenargumenten en adviezen geformuleerd (RSS, 2008). Statistiek moet wel binnen het wiskundeprogramma blijven: niet alleen zijn wiskundedocenten beter in staat om statistiek te geven dan andere vakdocenten, statistiek kan leerlingen ook motiveren om wiskunde te gebruiken. Binnen scholen zouden statistiekcoördinatoren moeten worden aangesteld, want veel wiskundedocenten blijken zelf weinig statistiek gehad te hebben of niet goed raad te weten met de didactiek die het vak vereist. Op de heel lange termijn zou statistiek volgens de RSS een zelfstandig vak kunnen worden.

In tegenstelling tot wat Van Buuren voor de psychologieopleiding heeft gedaan, meent de RSS dat integratie met andere vakken slecht is voor de samenhang en herkenbaarheid van het vak statistiek. In het beroepsonderwijs geldt dit argument naar ons idee niet: daar moeten leerlingen vooral statistiek leren gebruiken binnen beroepstaken.

Tot slot gaan we terug naar Nederland. Vanuit het perspectief van de wiskunde als discipline is het begrijpelijk dat statistiek in de buitenring wordt geplaatst: statistiek is geen wiskunde. Maar de vraag die volgens gesteld hoort te worden is: welke kennis en vaardigheden hebben leerlingen later in hun studie, beroep en leven nodig? Dan komt statistiek ineens heel centraal te staan.

Referenties

- D.S. Moore (1992): *Teaching statistics as a respectable subject*. In: F.S. Gordon (ed.): Statistics for the twenty-first Century. Washington (DC): The Mathematical Association of America; pp. 14-25.
- T.M. Porter (1986): *The rise of statistical thinking, 1820-1900*. Princeton (NJ): Princeton University Press.
- Royal Statistical Society (2008): *Teaching statistics across the 14-19 curriculum*. Gedownload van: *www.rss.org.uk/main.asp?page=2638*
- A.F.M. Smith (2004): *Making mathematics count / The report of Professor Adrian Smith's inquiry into post-14 mathematics education*. Great Britain: Stationery Office.
- I.H. Stamhuis (1989): *'Cijfers en aequaties' en 'kennis der staatskrachten' / Statistiek in Nederland in de negentiende eeuw*. Amsterdam: Rodopi.
- S.M. Stigler (1986): *The history of statistics the measurement of uncertainty before 1900*. Cambridge (MA): Belknap Press of Harvard University Press.
- J. Tukey (1977): *Exploratory data analysis*. Reading (MA): Addison-Wesley.

Proefschriften over statistiekonderwijs zijn te vinden op: *www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/dissertations.php*

Over de recensenten

Arthur Bakker is onderzoeker aan het Freudenthal Instituut. Hij begeleidt twee promovendi op het gebied van statistiek-onderwijs en doet zelf een onderzoek naar technisch-wiskundige competenties in het middelbaar beroepsonderwijs.
E-mailadres: *A.Bakker@fi.uu.nl*
Adri Dierdorp is wiskundedocent aan College Hageveld en voert binnen het DUDOC-programma een promotieonderzoek uit naar statistiek als brug tussen wiskunde en de natuurwetenschappen.
E-mailadres: *A.Dierdorp@fi.uu.nl*

Boekbespreking / Wiskunde in een notendop

[Ger Limpens]



Ondertitel: (bijna) Alles wat je altijd wilde weten
Auteurs: Martin Kindt en Ed de Moor
Uitgever: Bert Bakker, Amsterdam
ISBN: 978 90 351 3212 2
Prijs: € 9,95 (206 pagina's)

Wat moet je vinden van een boek dat als 'boventitel' heeft '(bijna) Alles wat je altijd wilde weten' en de minstens zo ambitieuze titel 'Wiskunde in een notendop' draagt? In ieder geval kun je mijns inziens stellen dat die titelpagina behoorlijk uitnodigend werkt en verder toch ook de lachspieren fors prikkelt. Natuurlijk kan één en ander niet letterlijk bedoeld zijn. En dat wordt al snel duidelijk als je het voorwoord van Martin Kindt en Ed de Moor, twee in het Nederlandse wiskundeonderwijs niet onbekende onderzoekers/onderwijs-ontwikkelaars, leest. En al lezende wordt ook de interesse verder al snel opgewekt.
De uitgave is erg laagdrempelig opgezet en bevat ook voor niet al te zwaar wiskundig opgeleide lezers merendeels goed leesbare informatie. Het boek bevat 15 hoofdstukken, elk verdeeld in een wisselend aantal paragrafen. Ieder van deze hoofdstukken heeft een specifiek wiskundig thema als onderwerp en is steeds zo opgebouwd, althans dat is het streven, om gaandeweg het hoofdstuk een stijgende moeilijkheidsgraad te vertonen. Vaak betekent dit dat zo'n specifiek thema een min of meer chronologische aanpak kent: hoe verder we komen in de tijd, hoe 'zwaarder' de wiskunde die gepaard gaat met dat thema. Toch zal ook de niet overmatig wiskundig getrainde lezer vaak een heel hoofdstuk min of meer tot op het eind door kunnen nemen, en dat lijkt me een groot compliment voor voornoemde auteurs.
De thema's die de revue passeren, zijn achtereenvolgens 5000 jaar cijfers en getallen, 500 jaar rekenen met letters, veeltermen en nulpunten, de aritmetische driehoek, kans en verwachting, priemgetallen, aanschouwelijke meetkunde, regelmaat in vlak en ruimte, meetkunde en axiomatiek, berekeningen in de ruimte, bijzondere getallen, rijenproblematiek, differentiëren en integreren, machten-logaritmen-spiralen en als slotthema een hoofdstuk dat de wiskundige wetenschap met een helikopterblik beschouwt waarbij de enorme groei en specialisatie binnen de wiskunde aan de orde komt, maar ook aandacht gegeven wordt aan enkele tweetallen aspecten die onderling tegengesteld zijn en tegelijkertijd toch ook beide voor wiskunde uiterst relevant zijn. Denk daarbij aan duo's als logica-intuïtie, platonisme-formalisme en denkspel-nut.
Al lezende vraag je je wel af voor wie dit boek nu precies geschreven is. Is dit een boek dat thuis hoort in een schoolbibliotheek waarmee de in wiskunde geïnteresseerde middelbare schoolleerling bediend kan worden? Is het een boek voor de leek die ooit als leerling gedwongen werd nare reeksen zinloze vergelijkingen op te lossen en nu, in de kwaliteitsboekhandel staande, denkt een antwoord te krijgen op de vraag waarom die vergelijkingen ooit moesten? Of is het bedoeld voor de wiskundeleraar om weer eens her te beleven welke bijzondere zaken er in die discipline allemaal aan de orde komen? Na het boek gelezen te hebben weet ik het antwoord op die vraag eigenlijk nog niet. Maar ik vermoed dat alledrie de categorieën wel heel goed bediend worden door dit boek. Kindt en De Moor slagen in het overbrengen van hun enthousiasme en laten veel fraaie en onvermoede doorkijkjes zien. Hoewel het boek, zoals gezegd, verschillende thema's bevat, stappen ze regelmatig van het ene thema op het andere over door te verwijzen naar onderwerpen en invalshoeken die in eerdere hoofdstukken al zijn aangestipt. Die zojuist vermelde leerling en ook die leek zal het dan wel regelmatig duizelen vanwege de enorme diversiteit en complexiteit van de wiskundige discipline maar ook de wat meer gevorderde lezer zal toch op een aantal plekken ook tegen zaken aanlopen die nieuw of verrassend voor hem zijn. Dat gold in ieder geval voor mij. Ik heb er van genoten. En niet alleen van de titel dus.

Over de recensent

Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: *ger.limpens@gmail.com*



De nieuwe grafische calculator FX-9860G SD: Even divers als Wiskunde zelf:

- Groot display met natuurlijke weergave van wiskundige formules.
- Geheugen: 64 kB RAM en 1,5 MB flash ROM.
- Meer dan 1000 technische en wetenschappelijke functies.
- Spreadsheet functie.
- Geometrische programma's (add-in).
- e-Activity jr.
- PC emulatie software.
- USB interface voor data overdracht.

Ook beschikbaar zonder SD geheugenkaart slot als FX-9860G.

* Compatible SD kaarten: TOSHIBA: SD-NA032MT, SD-NA064MT, SD-NA128MT, SD-NA256MT, SD-NA512MT, SD-FA128MT, SD-FA256MT.
SanDisk: SDSDB-64-J60, SDSDB-128-J60, SDSDB-256-J60, SDSDB-512-J60, SDSDH-256-903, SDSDH-512-903

CASIO

CASIO Benelux B.V. - Prof. W.H. Keesomlaan 6G - 1183 DJ Amstelveen - Tel: 020-545 10 70 - Fax: 020-545 10 89

www.casio-europe.com

Vakantiecursus 2008

[Gert de Kleuver]

Wiskunde en profil

In april 2008 kreeg ik van het CWI (Centrum Wiskunde & Informatica) de eerste informatiefolder voor de vakantiecursus opgestuurd. Het eerste dat opviel was de titel 'Wiskunde en profil': wat moest ik daar nu van denken? Zouden we misschien ideeën voorgeschoteld krijgen voor onderwerpen van profielwerkstukken? Nadere bestudering van de folder leek wel in die richting te wijzen. Ik probeerde in te schatten welk onderwerp mij het meeste zou aanspreken. De ervaring leert dat zo'n inschatting meestal niet klopt. Maar goed, dit jaar ging ik voor echt of vals in de kunst door Eric Postma, een voordracht met als titel 'De zaak zonnebloemen'. Dit moest toch naar Vincent van Gogh verwijzen?

Het programma van de cursus (van vrijdag 15.00 uur tot zaterdag 15.00 uur) zag er als volgt uit:

Prof. dr. J.M. Aarts - Ontvangst en welkom, Wiskunde en profil, Het gezicht van de wiskunde

Prof. dr. ir. C. Vuik - Iteratieve methoden voor niet-lineaire vergelijkingen

Drs. A.J. Goddijn - De verbeelding verhongert

Prof. dr. E. Postma- Emmaüsgangers zijn geen blindgangers

Dr. P. Grünwald - Kansloos: van Willem Ruis tot Lucia de B.

Dr. L. Taelman - RSA (geheimschrift)

Dr. M.D.G. Swaen - De ware wiskunde (L.E.J. Brouwer)

Dr. B. Zevenhek - Pro-eindige Fibonaccigetallen

Dr. F. Wiedijk - De kunst van het bewijzen

Iteratie

Samen met een collega ging ik in de vakantie naar Eindhoven. We werden welkom geheten door Wilmy van Ojik, die al jaren als gastvrouw optreedt, en kregen allemaal een syllabus. Na het korte welkomstwoord van Jan Aarts gingen we van start met een college over iteratieve methoden voor niet-lineaire vergelijkingen door Kees Vuik. Zijn uitleg was heel duidelijk, zodat het voor alle aanwezigen goed te volgen was. In de ontvangen syllabus stond een en ander verder uitgewerkt. De syllabus is wederom een mooi naslagwerk [1]. Vuik eindigde met de Newton-Raphson methode en het aardige was dat uit mijn aantekeningen van vorig jaar bleek dat Jan Wiegerink deze methode toen ook behandeld had. Het is één van de krachtigste en bekendste numerieke methoden voor het oplossen van een niet-lineaire vergelijking $f(x) = 0$. Het volgende voorbeeld werd besproken en staat ook in de syllabus:

Bepaal het positieve nulpunt van $f(x) = x^2 - 2$.

We nemen als startpunt $x_0 = p_0 = 1$. Dan is de vergelijking van de raaklijn in het punt $P(1, \text{-}1) : h(x) = \text{-}1 + 2(x - 1)$

De nieuwe benadering van het nulpunt is dan:

$$p_1 = 1 - \frac{-1}{2} = 1\tfrac{1}{2}$$

Dit vinden we (ook) uit:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Na drie stappen vinden we dan al een (afgekapte) benadering van het nulpunt met $p_3 = 1{,}41421$. Als je deze benadering met de vaste-punt iteratie (ook wel genoemd de Vaste-punt stelling van Banach of Dekpuntstelling van Brouwer; zie syllabus pag. 8) uitvoert, duurt het langer voordat je tot een oplossing komt. Ook dit liet Vuik zien.

Romantiek en schilderijen

Een heel bijzondere lezing werd gehouden door Aad Goddijn. Hij liet ons horen hoe je romantisch met wiskunde om kunt gaan door voor te lezen uit werken van William Wordsworth, John Keats en anderen (***zie pag. 111***). Ik kan iedereen aanraden zijn artikel in de syllabus te lezen. Daarnaast gaf Aad nog een aantal kopieën waarop nog veel mooie gedichten en andere bijdragen verzameld waren. Dat was weer even iets extra voor de aanwezigen.[2]

Als laatste wil ik de bijdrage van Erik Postma bespreken. De titel van zijn lezing was veranderd in 'Emmaüsgangers zijn geen blindgangers'. Postma nam ons eerst mee in de wereld van computers die ingezet worden om schilderijen te digitaliseren, om vervolgens de volgende stap te kunnen maken: automatische analyse van gedigitaliseerde schilderijen. Een belangrijke vraag bij het bepalen van de echtheid van schilderijen is hoe de computer de kunstkenner kan ondersteunen bij de beoordeling van schilderijen. Het gaat dan om kleur, compositie, herhaling van patronen en penseelstreken. Postma heeft samen met Igor Berezhnoy en Jaap van den Herik onderzoek gedaan hiernaar. Het project is zo groot geworden dat Igor Berezhnoy er een promotieonderzoek van heeft kunnen maken waarin hij een systeem ontwikkelt dat kunstexperts ondersteunt bij hun analyse van schilderijen. Voor deze lezing beperkte Postma zich tot het onderzoek naar het gebruik van complementaire kleuren en de penseelstreken in de werken van Vincent van Gogh. Veel voorbeelden werden getoond waarin duidelijk werd dat computers geen blindgangers zijn als het gaat over de textuur van een schilderij. Heel mooi vond ik de voorbeelden van de complementaire kleuren: we zagen bekende schilderijen van Van Gogh en toch was het lastig om direct aan te geven welke de vervalsing was. De voordelen van de inzet van een computer hierbij waren overduidelijk.

Het was een zeer interessante vakantiecursus voor docenten uit het voortgezet en hoger onderwijs. Zeker de moeite waard. Eerlijk is eerlijk, ondanks de goede en verrassende voordracht van Erik Postma twijfel ik nog wel over de meest aansprekende voordrachten. Voor mij zijn het er dit jaar de volgende twee: de bijdrage van Cees Vuik en die van Lenny Taelman over geheimschriften.

Noten

[1] De syllabus van de Vakantiecursus 2008 (ISBN 90 6196 548 9, 136 pagina's, € 15,85) is verkrijgbaar bij het CWI via de site: *http://old-www.cwi.nl/publications/Abstracts_syll/syll58.html*

[2] Een kortere versie van Aad Goddijn's artikel in de CWI-syllabus verscheen eerder (in 2004) in *Euclides* 79(4) onder de titel *Het romantisch ongenoegen met de rede*.

Fotografie

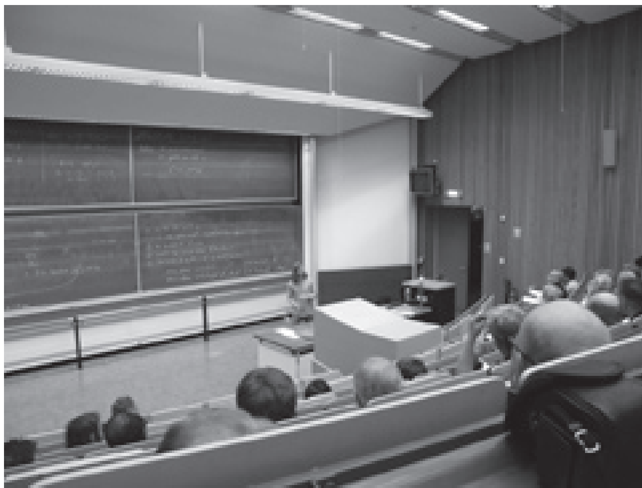
Marianne Lambriex

Over de auteur

Gert de Kleuver is redactievoorzitter van *Euclides* en afdelingsleider aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *g.de.kleuver@gmail.com*











Vergelijkingen

Die hoekigheid: daar blijft het echt
om draaien. Twee binnenhoeken die een rechte
heeft gemaakt, die door twee rechten ging.
Zijn ze te scherp, dan is er uitzicht.
Maar zijn ze recht rest slechts oneindigheid.
Ik hang aan recht en wijs de hoeken af
die ik niet samen strekken kan. Geknakt
lijkt mij een slecht begin. Men hoort
zijn eigen rug te rechten, zelf het woord
in daden om te zetten. Trek recht het koord
dat eeuwig evenwijdig loopt. Maar onrust
trekt al eeuwen door dat ferme punt.
Wat zeker scheen bleef onbewezen
en laat zich slechts met moeite lezen,
strandt op een tartend kromme kust.
Dat naast en parallel: geef het maar op.
Alleen een spiegel kan voorkomen dat je botst.

Michaël Zeeman (1958-) / Uit: *Verhoudingen* (1995)

AANKONDIGING / WINTERSYMPOSIUM KWG

Wiskunde een Kunst

Het komende Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap staat in het teken van wiskunde en kunst.

- Ferdinand Verhulst, hoogleraar (em.) dynamische systemen aan de Universiteit Utrecht, opent het symposium met een voordacht over wiskunde en literatuur.
- Aline Honingh, 'research fellow' in de Music Informatics Research Group aan de City University in Londen, zal spreken over wiskunde en muziek.
- Albert van der Schoot, als kunst- en cultuurfilosoof verbonden aan de faculteit Geesteswetenschappen van de Universiteit van Amsterdam, en als lector Kunst en Reflectie aan ArtEZ Hogeschool voor de Kunsten, sluit het symposium af met een lezing over de geschiedenis van de gulden snede.

Datum, plaats, ...

Het symposium wordt gehouden op **zaterdag 10 januari 2009** in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein 29, 3512 JE Utrecht).
Het programma start om 10:00 uur en eindigt ca. 14:45 uur.
U wordt verzocht u van te voren *on line* aan te melden via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, *www.wiskgenoot.nl* (kies dan 'wat doet het KWG' en vervolgens 'congressen en symposia'). Daar is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden.
De kosten voor het symposium bedragen € 17,00 voor KWG-leden en € 22,00 voor niet-leden. Deze bijdrage is o.a. voor een lunch en consumpties gedurende de dag.

Nadere inlichtingen: Iris van Gulik, e-mail: *gulikgulikers@home.nl* / telefoon: 038-4536366.

AANKONDIGING / WISKUNDE OLYMPIADE 2009

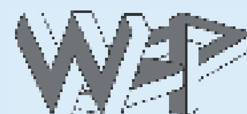
Op 30 januari 2009 vindt weer de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. We hopen dat uw school op die dag meedoet en dat u behalve vijfde- en vierdeklassers ook derde-, tweede- of zelfs eersteklassers (havo/vwo) de kans geeft om deel te nemen.
U kunt zich opgeven door een e-mail te sturen naar Melanie Steentjes (*melanie.steentjes@cito.nl*) met daarin de gegevens van uw school en naam van de contactpersoon.

De beste leerlingen per leerjaar zullen uitgenodigd worden voor de tweede ronde. Bovendien zullen zij in de tussenliggende maanden in de gelegenheid worden gesteld een regionale training voor de tweede ronde te volgen op een universiteit bij hen in de buurt (met dank aan de universiteiten van Amsterdam (UvA), Twente (UT), Nijmegen (RU), Utrecht (UU), Leiden (UL) en Eindhoven (TU/e)).



Meer informatie: *www.wiskundeolympiade.nl*

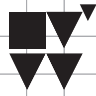
AANKONDIGING / WSP 2009



Doe mee met de Wiskunde Scholen Prijs 2009!

De Wiskunde Scholen Prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskunde-onderwijs naar buiten te treden.
Alles wat u buiten de normale lesstof doet, kan meedingen naar een prijs van 1000 euro.

Meer informatie: *www.wiskundescholenprijs.nl*



Kunt u het nog volgen?...

[Marian Kollenveld]

Het was voor de zomervakantie opeens weer helemaal mis na een brief van de Staatssecretaris aan de Tweede Kamer met daarin besluiten over de wiskundeprogramma's voor havo en vwo in 2013. Boze woorden, een brief op poten van de werkgroep havo/vwo naar de Staatssecretaris, een petitie met 500 ondertekenaars, een advertentie in de krant, stukken en brieven over en weer. Iets dergelijks is voor ons ongebruikelijk. Zijn er nu opeens wiskundekampen en wie zit waar? Laat ik voorop stellen dat het enige soort wiskundekamp waarin ik persoonlijk levend wil worden aangetroffen, een Vierkant Zomerkamp is. En naar mijn mening liggen de standpunten minder uiteen dan in de hitte van de strijd lijkt. Iedereen wil namelijk hetzelfde: goed, zinvol en interessant onderwijs voor onze leerlingen. Al zijn er wel duidelijke verschillen in visie hoe dat onderwijs eruit moet zien.

Wat is er mis?

De discussie draait vooral om de vaak problematische aansluiting op het vervolgonderwijs, daar zijn de ontwikkelingen van de laatste jaren immers het meest merkbaar. Denk daarbij aan:

- De marginalisering van het vak wiskunde in de school door de gestapelde reducties, kwalitatief en kwantitatief, van basisvorming en tweede fase. Door de basisvorming werd het niveau van de onderbouw havo/vwo verlaagd en als gevolg daarvan het aantal lessen in de onderbouw vaak teruggebracht. De invoering van de tweede fase ging eveneens gepaard met reducties in het aantal lessen, waardoor het wiskunde-programma dat op papier stond, in de praktijk niet of nauwelijks haalbaar was (slechts 30 tot 45 % van de tijd was contacttijd, wat de programcommissie niet had voorzien). Bij elkaar een verlies van anderhalf à twee jaar les vergeleken met de tijd vóór basisvorming en tweede fase. Inmiddels is de basisvorming afgeschaft, maar ik betwijfel of alle scholen weer terug zijn naar de vier lessen per week van 'vroeger'.
- De isolering van het vak wiskunde in de school doordat uit belendende vakken als natuurkunde, economie en aardrijkskunde de wiskunde en het rekenen, het cijfermatig werken, steeds meer is verdwenen. Een ontwikkeling die bij de vernieuwing van deze vakken nog wordt versterkt, waardoor wiskunde als enige vak in havo/vwo verantwoordelijk lijkt voor de doorstroom. Het is in elk geval het enige vak waarbij doorstroomrelevantie nadrukkelijk als eis wordt genoemd.
- Het lerarentekort, en dat is ook kwalitatief en kwantitatief. Zonder (goed opgeleide) leraren geen goed onderwijs.

Ik noem met opzet niet de tegenstelling realistisch/zuiver(?) wiskundeonderwijs omdat me dat niet als oorzaak van het probleem voorkomt, en het ook een schijntegenstelling is. Geen weldenkend mens met enig verstand van het onderwijs zal positie kiezen voor alleen maar kale sommen maken zoals in de jaren '60, noch denken dat alles altijd enkel in context mag worden geleerd en getoetst. In de praktijk van alledag gaat het om de optimale mix van beide, en die mix kan verschillen, afhankelijk van de interesses en mogelijkheden van de leerling.
In contrast met deze ontwikkelingen in het voortgezet onderwijs staan onverminderd, en steeds meer zelfs, de eisen van de vervolgopleidingen. Ook vakken als economie en natuurkunde, die de wiskunde zelf zo comfortabel zijn gaan mijden in hun havo/vwo-programma, stellen bij de ingang van het hoger onderwijs luid en duidelijk hun eisen. Dan is wiskunde met terugwerkende kracht opeens wel heel belangrijk voor een succesvolle studie van dat vak. Ingeklemd tussen deze tegengestelde bewegingen moet de schoolwiskunde wel bezwijken, dan wordt een goede aansluiting op het vervolgonderwijs een onmogelijke opdracht.

Oplossing 1

Je accepteert die gedaalde lestijd als gegeven en trekt hieruit de logische consequentie dat dus de wiskunde-examenprogramma's navenant terug moeten naar het niveau van vierde klas plus of min een beetje (bij vwo resp. havo). Als dat gebeurt en goed doorgegeven wordt aan het vervolgonderwijs, is ons probleem met de aansluiting opgelost, de leerlijn van de leerling loopt door. Het gat van die anderhalf, twee jaar moet dan worden gedicht door het vervolgonderwijs. Die vinden dat misschien niet fijn, want daardoor zakt ook hun te bereiken eindniveau, maar het is wel consequent.

Oplossing 2

Je kunt ook bedenken dat een jaar in het voortgezet onderwijs voordeliger is dan een jaar in het vervolgonderwijs en het dus van belang vinden om de aansluiting op hetzelfde niveau te hebben als voor de tweede fase.
De consequentie daarvan is dan dat je die anderhalf à twee jaar lestijd weer aan het voortgezet onderwijs terug moet geven. Probleem ook opgelost, de leerlijn van de leerling loopt door.

Non-oplossing 3

Wat nu gebeurt is een combinatie: de eisen graag op het oude niveau, maar de lestijd niet, en dan zet men alle kaarten op de algebraïsche vaardigheden.
Ik zou dat geen oplossing willen noemen, maar juist het grote probleem; daarop kom ik nog terug.

Als gevolg van de gekozen non-oplossing 3 zijn door universiteiten entreetoetsen al dan niet gekoppeld aan zogenaamde 'bijspijker-cursussen' ingesteld. Ik zie daar weinig in; volgens mij is dat ook geen oplossing, de kloof is daarvoor te groot. Het gaat niet om bijspijkeren, of even ophalen van wat weggezakt is, maar om het aanbrengen van nieuwe kennis. En dat doe je niet even snel. Het is domweg niet mogelijk om in korte tijd met enig blijvend succes vaardigheden op te doen die een zekere rijping vragen.
Ik vind het ook principieel onjuist. Een leerling moet gewoon een doorlopende leerlijn kunnen volgen, de aansluiting moet goed zijn. En dat is een tweezijdig proces. Wij willen onze leerlingen in het voortgezet onderwijs goed voorbereiden, maar het vervolgonderwijs moet ook kennis willen nemen van het programma. Sommige 'entreetoetsen' van universiteiten schoten en schieten daarin schromelijk tekort. Vandaar dat de NVvW recentelijk 'exittoetsen' heeft ontworpen, in de hoop daarmee meer helderheid te verschaffen over wat redelijkerwijs verwacht kan worden. In zo'n exittoets ligt, net als in een entreetoets, de nadruk op algebra, maar dan met vragen die binnen de leerstof vallen en zo gesteld dat onze ex-leerlingen begrijpen wat er bedoeld wordt.
Het ideaal is natuurlijk als 'exit' en 'entree' samenvallen en dus gewoon beide weer kunnen worden afgeschaft. Maar dat betekent echt kiezen voor oplossing 1 of oplossing 2, en die keuze zal door de politiek moeten worden gemaakt.

Wiskunde B …

… en de reducties

Het standpunt van de NVvW was dat er met de gereduceerde omvang van B12 naar het niveau van het deelvak B1 geen fatsoenlijk wiskunde B-programma voor havo en vwo te maken zou zijn, onderwijsbaar, interessant en doorstroomrelevant. Waarbij doorstroomrelevantie meer aspecten heeft dan alleen het beheersen van technische en algebraïsche vaardigheden. Structureren, modelleren, abstraheren en probleem oplossen horen daar duidelijk bij, daar heb je ook buiten het wiskunde-sommen maken wat aan. Die notie is ook terug te vinden in het rapport van de commissie doorlopende leerlijnen rekenen en taal.

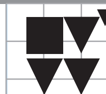
Met alleen kennis van technieken en formules red je het niet, ook niet in je onderwijs, als het je ernst is je leerlingen te motiveren en enthousiasmeren voor het vak. Dat hebben we wel geleerd van de jaren dat het programma erg algoritmisch en technisch was, de tijd van voor wiskunde A zeg maar. De jongere lezers zullen zich dat niet herinneren, maar ooit was dat zo.

In die tijd had ik een heel begaafde leerling, en ik vroeg hem uiteraard of hij er niet over dacht om wiskunde te gaan studeren. Hij zei toen dat hij dat niet wilde, omdat hij niet de hele dag alleen op een kamertje moeilijke sommen wilde maken later, en leraar leek hem ook niet. Een ander beeld van wiskunde had ik hem niet bijgebracht, en eerlijk gezegd had ik dat zelf toen ook niet zo duidelijk, maar leraar leek mij nu juist wel.
Vergelijk dat met nu: onlangs nog spraken mijn vwo B12-leerlingen hun verbazing uit over waar wiskunde toch allemaal te vinden was en nodig is. De mobiele telefoon, satellieten, internet, coderingen, beveiligingen, die grote priemgetallen, complexe getallen, de NS-dienstregeling, ruimtesondes, chaostheorie, ze vinden het allemaal hoogst interessant.
Ik geniet daarvan, onze eigen zebrareeks geeft daar zo veel inspiratie voor en ik ga toch niet voor niks elk jaar zelf naar de vakantiecursus en de wiskunde dagen? Dan wil je toch niet terug naar alleen sommen?

… en de Resonansgroep, lust of last?

Als gevolg van ons standpunt ten aanzien van de reducties voor wiskunde B waren we het wel eens met de gedachte van de Tweede Kamer om dit standpunt nader te laten bezien door een zogenoemde resonansgroep, in de overtuiging dat die tot geen andere conclusie zou kunnen komen, dan dat met deze omvang geen volwaardig wiskunde B-vak te maken zou zijn. Niet in 2007 en niet in (toen nog) 2011.

Als je van een mens de armpjes en beentjes afhakt, heb je wel iets kleiners, maar geen kleiner mens, en zo is het ook bij een wiskundeprogramma: onder een bepaalde grens (en daar zitten we nu) is er geen volwaardig programma mogelijk.
Het is een gemiste kans dat de Resonansgroep geen expliciete uitspraak over het aantal studielasturen van het B-programma heeft gedaan. Het stond



weliswaar niet in de opdracht, maar een beetje eigenwijs had van mij wel gemogen. Impliciet is dat overigens wel gebeurd: de ingrepen in het B-programma zijn dusdanig dat zelfs de Staatssecretaris constateert dat het nu wel een erg eenzijdig programma is geworden.
Het is bizar dat wiskundigen nu elkaar de strot lijken af te bijten over de vraag of er basisvaardigheden algebra in de programma's moeten. Natuurlijk moet dat, waarom heten het anders basisvaardigheden tenslotte, en er is zelfs zonder programma-wijziging terecht meer aandacht voor gekomen de afgelopen tijd.

1. In de nieuwe leerboeken van de onderbouw is duidelijk meer algebra te vinden. Met het afschaffen van het ene niveau van de basisvorming is het officieel toegestaan, maar die ontwikkeling was toch al aan de gang. Er zijn geen m/h/v-boeken meer voor de onderbouw.
2. In de laatste examens zijn, mede op aandrang van leraren, ook geleidelijk weer meer algebraïsche vaardigheden te vinden. In de B-examens moet meer en meer iets 'exact' worden berekend.
3. In de herziening van PEP (de huidige programma's per 2007) is ook heel expliciet in alle programma's meer aandacht voor de algebra; de syllabi bevatten uitgebreide lijsten van wat leerlingen technisch moeten kunnen.
4. De voorstellen van de vernieuwings-commissie cTWO gaan daarin nog een stap verder, met name bij de B-programma's. De NVvW heeft daar wat voorzichtig terughoudend op gereageerd, mede op basis van reacties van leden. Het experiment moet uitwijzen of dat nog wel haalbaar is, zeker in de beperkte tijd.

De Resonansgroep was dit alles nog niet genoeg; zij wenste nog voor de vijfde keer een verhoging van de algebraïsche vaardigheden en wel in alle programma's, niet alleen in wiskunde B. Dat heeft de Staatssecretaris overgenomen en daartegen is onder andere door ons geprotesteerd omdat het niet meer verantwoord is. Niet

alle algebra is basisvaardigheid, er is een grens, en die ligt per schooltype/profiel verschillend. Te ver doorslaan in deze richting gaat ten koste van de kwaliteit van het totale programma, het tast andere onderwerpen wezenlijk aan.
Ik vraag me daarbij wel af of de leden van de Resonansgroep, en dus ook de Staatssecretaris, hebben beseft dat er al vier aanscherpingen van de algebra waren voorzien, die uiteraard pas na enige tijd zichtbaar worden. Maar we zitten nu wel met de gebakken peren. Het treurige is dat hierdoor een mogelijk breed wiskundeprogramma in de toekomst geofferd wordt aan een mijns inziens al achterhaalde reparatie van algebraïsche vaardigheden en dan ook nog vanuit een door de Staatssecretaris gehanteerde heel enge definitie van doorstroomrelevantie, waarin eigenlijk alleen algebraïsche technieken als doorstroomrelevant gezien worden.
Zo bezien heeft wiskunde als belangrijkste taak het technisch hulpje te zijn van andere vakken, en dat moet koste wat kost worden veilig gesteld. Een louter instrumenteel standpunt: alles wat buiten het direct toepasbare valt wordt dan irrelevant en kan geschrapt als er te weinig ruimte is. Mij persoonlijk is dat een gruwel. Dat kan natuurlijk niet. Heeft wiskunde niet al een slordige 25 eeuwen zelf enige waarde, was er geen wiskunde vóór de algebra, is ons vak niet veel rijker dan dat? Welke leerling wordt gegrepen door een vak waarin veel oefenen van algoritmen centraal staat? Voor de goede leerling is het saai, want weinig uitdagend; voor de minder begaafde leerling is het een onoverkoombare berg. In beide gevallen weinig motiverend.

Kansrekening en statistiek worden in het 'nieuwe' B-programma node gemist. Evenals ontwikkelingen van de laatste paar honderd jaar en de buitenwereld, waarin ons moderne leven met de huidige technologie zonder wiskunde onbestaanbaar zou zijn.
Wiskunde D wordt door de staatssecretaris erg opzichtig als doekje voor het bloeden gehanteerd, maar het is slechts een keuzevak. Wel heel doorstroomrelevant overigens.
Het stemt toch droevig om te zien dat wiskunde B+D bij elkaar bij havo ongeveer het oude havo B van voor de tweede fase is, wat ik overigens een goed programma vond. Bij vwo is het totaal wel meer, met interessante uitbreidingen als wiskunde in wetenschap, waardoor het eveneens heel natuurlijk het juiste programma is voor een exacte vervolgstudie.

En dat leidt dan onontkoombaar naar:

Oplossing 2.1 voor wiskunde B!
Als je een goede aansluiting wilt op technisch/exacte studies en ook nog werk wil maken van het versterken van bèta-onderwijs in meer brede zin, zou wiskunde B+D het gewone B vak moeten zijn. Dan heb je geen aansluitproblemen meer, dan leren ze genoeg en is het nog eens afwisselend en aantrekkelijk ook. Wie weet gaan ze het dan ook nog studeren. Maar durft de politiek het aan om dit probleem echt zo op te lossen? Even echt lekker groot denken? Woorden en daden? Boter bij de vis? Laat ik dat oplossing 2.1 noemen.

Wiskunde A/C
De politieke keuze om voor alle havo/vwo-leerlingen (sinds augustus 2007 met uitzondering van havo CM) wiskunde verplicht te stellen moet ook consequenties hebben.

- Consequenties voor de inhoud. Vandaar de invoering van minder exacte vakken wiskunde A en C, voor alle leerlingen met minder interesse of talenten op het exacte vlak, voor wie het algebraïsch/exact manipuleren vaak te hoog gegrepen en dus betekenisloos is en ook in hun vervolgopleiding niet van wezenlijk belang. Wiskunde A is bewezen al 20 jaar een succesverhaal, wiskunde C wordt dat hopelijk ook, maar alleen als er niet teveel wordt verwacht van algebraïsche vaardigheden bij deze leerlingen. Voor hen is gecijferdheid veel relevanter, één van de doelen bij C (zie het Visiedocument van cTWO).
- Consequenties voor de lestijd. Deze leerlingen krijgen nu vaak mondjesmaat les, twee hooguit die uur in de week, terwijl wiskunde voor hen het enige exacte vak is in een zee van andere. Een lastig incident dat je snel weer vergeet, terwijl juist voor deze leerlingen vaak extra zorg en aandacht nodig is, omdat ze het nu eenmaal niet zo snel begrijpen. Dan doe je er dus verhoudingsgewijs langer over. Die tijd moet je krijgen als het belangrijk wordt gevonden dat iedereen wiskunde doet. Dit probleem is bij wiskunde C voorlopig per 2007 opgelost doordat daar het oude, kleinere A1 programma meer studielast heeft gekregen, voor wiskunde A is dat niet het geval.

Wiskunde A en de knagende tand des tijds
Bij wiskunde A doen de veranderingen ook pijn. De invoering van wiskunde A in de tachtiger jaren is een succesverhaal. In mijn herinnering ook meteen het enige echte succes, want ingegeven door inhoudelijke overwegingen. En niet te vergeten: voor de invoering is ruim tijd genomen en er was een stevige nascholing voor docenten zodat iedereen goed voorbereid aan het programma kon beginnen. Zo zou het altijd moeten, maar zo is het nooit meer gegaan, omdat elke vernieuwing daarna samenviel met een structuurverandering, lees bezuiniging.
Het ooit zo mooie oorspronkelijke programma paste niet in de gereduceerde tijd. In de aanpassingen van 2007 zijn A-onderwerpen gesneuveld ten faveure van meer algebra en analyse. Bij de cTWO-plannen voor 2011 is dat nog verder doorgezet. De NVvW heeft daar wat kanttekeningen bij geplaatst; ook hier zal het experiment duidelijkheid moeten geven. Havo A is betrekkelijk ongeschonden, maar de Resonansgroep, en dus de Staatssecretaris, doen daar bij vwo A nog een schepje algebra bovenop. Zo is wiskunde A op het vwo nauwelijks nog als zodanig herkenbaar, dus misschien moeten we dat succesverhaal maar even voor ons houden. Wiskunde B-light of B-min zou inmiddels een betere naam zijn, en het vorige deelvak B-min was weinig succesvol. Omdat de deelvak/heelvak-constructie in het algemeen niet zo succesvol bleek, is bij de herziening van 2007 als uitgangspunt genomen dat de deelvakken werden afgeschaft. Met als uitzondering het o zo belangrijke vak wiskunde, zoals u weet. Slechte resultaten uit het verleden geven weinig hoop voor de toekomst.

- Wiskunde A heeft een plaats gekregen in het NG-profiel om voor een grote groep leerlingen een zachte bètastudie toegankelijk te houden. Voor een medicijnenstudie was wiskunde A altijd al voldoende. Ook toen al bestond de combinatie wiskunde A en

natuurkunde. Nu er per 2007 al extra aandacht is voor algebraïsche vaardigheden, lijkt er plotseling een probleem met betrekking tot de combinatie wiskunde A en natuurkunde en moeten er van de Resonansgroep, en dus de Staatssecretaris, nog meer algebraïsche vaardigheden in het programma.

- Wiskunde A heeft als vanouds een plaats in het EM-profiel, voor alfa-gamma-richtingen. Voor sommige economische studierichtingen is dat voldoende, voor andere is wellicht wiskunde B beter geschikt. Pogingen om wiskunde A voldoende te maken waar wiskunde B eigenlijk beter zou zijn, maar men het niet kan/wil eisen, maken de zaak er niet overzichtelijker op. Ook blijft onduidelijk wat echte eisen zijn in de zin dat het echt nodig is in de studie, dus ook na de propedeuse, en waar de wiskunde gebruikt wordt voor selectie. Pogingen om daar echt achter te komen zijn vooralsnog gestrand.

Verzin een list: oplossing 2.2 voor wiskunde A?

Hoe deze tegenstellingen te verzoenen zijn is niet zo eenvoudig. Misschien biedt een probaat middel uit de lespraktijk uitkomst: doe een stapje achteruit en bezie of je terug kunt gaan naar een situatie waarin een probleem wel op te lossen is.
Vertaald naar dit probleem zou het betekenen dat je misschien terug moet naar de oorspronkelijke gedachten, het oorspronkelijke vwo A-programma van HEWET in de oorspronkelijke omvang van voor de tweede fase. Dat combineerde kansrekening, continue en discrete analyse op een alleszins redelijk niveau. Ik kan me niet herinneren dat er toen klachten waren over de aansluiting. Maar ja, het aantal lesuren toen… Those were the days!

Tot slot

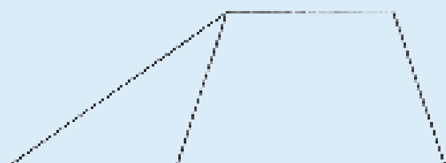
Op argumenten deze discussie beslissen binnen de huidige randvoorwaarden zie ik niet gebeuren en het nu door OCW gevraagde Salomonsoordeel van een 'hogere' instantie als HBO-raad en VSNU over de nieuwe programma's binnen dezelfde randvoorwaarden lost ook weinig op als het wezenlijke probleem niet wordt aangepakt. Hoe je het wendt of keert: In vier jaar les is domweg niet een programma dat op vijf of zes jaar is gebaseerd te realiseren zonder wezenlijk verlies, in de breedte en/of in de diepte.
De discussie gaat nu over de breedte óf de diepte, in mijn visie kan dat nergens toe leiden omdat het volume niet meer toereikend is. Mijn stelling is dat je moet streven naar een vergroting van het volume. Dat is het eerste probleem, dat we echter niet zelf kunnen oplossen. Daarover zijn we in gesprek met overheid en politiek. Daarna is de rest oplosbaar en kan er een evenwicht worden gevonden.

Ik hoop u hiermee wat duidelijker te hebben gemaakt wat er aan de hand is. Dus dat u het allemaal weer kunt volgen.

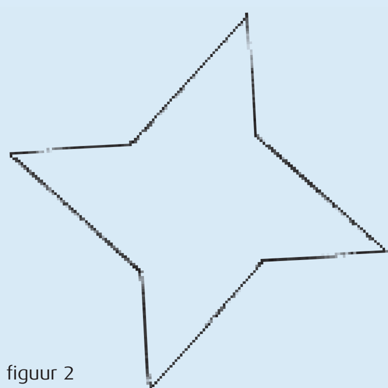
Puzzel 84-3

Vlakvullers

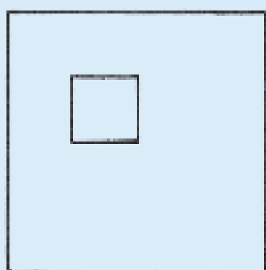
[Frits Göbel]



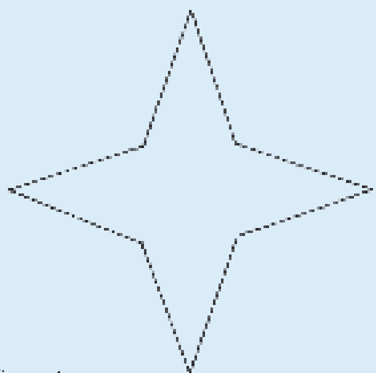
figuur 1



figuur 2



figuur 3



figuur 4

Als met kopieën van een bepaalde figuur het vlak kan worden overdekt, zonder overlappingen, dan spreken we van een *vlakvuller*. De gelijkzijdige driehoek, het vierkant en de regelmatige zeshoek zijn voorbeelden van vlakvullers en het zijn de enige regelmatige veelhoeken met deze eigenschap. Ook een willekeurige driehoek is een vlakvuller, evenals een willekeurige vierhoek, die niet eens convex hoeft te zijn.

De regelmatige vijfhoek is dus geen vlakvuller, maar hij is in twee stukken te verdelen die je zodanig aan elkaar kunt zetten dat je met de ontstane vormen het vlak wél kunt vullen; ***zie figuur 1***. In de opgave wordt op dit thema gevarieerd.

Opgave

Ieder van de volgende figuren moet in twee stukken worden verdeeld en die twee stukken moeten zó aan elkaar worden gezet dat er een vlakvuller ontstaat.

a. Het molentje van ***figuur 2***. De inspringende hoeken vormen een vierkant waarop halve vierkanten zijn gezet.
b. Het vierkant met gat van ***figuur 3***.
c. De regelmatige achthoek.
d. De vierpuntige ster van ***figuur 4***. Ook hier vormen de inspringende hoeken een vierkant waarop deze keer gelijke, gelijkbenige driehoeken zijn gezet.

Als u er niet helemaal uitkomt, kunt u ook wel verdelingen in meer dan twee stukken insturen, uiteraard voor een gereduceerd aantal punten.
Bij puzzels van dit type wordt vaak gevraagd of je de stukken ook mag omdraaien.
Het antwoord is in dit geval: 'Ja, maar in de oplossingen die ik voor ogen heb, is dat niet nodig.'
Het is steeds voldoende om de resulterende figuren te geven, zonder een tekening van een vlakvulling. Als ik er geen vlak mee kan vullen, dan meld ik me nog wel.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 13 januari 2009.
Veel plezier!

Oplossing 84-1

Geheim-schriften

Er waren 24 inzenders, onder wie 3 nieuwe: Jos Remijn, Maarten Müller en Corrie de Jong. Hartelijk welkom!

Over het algemeen vond men de opgaven eenvoudig. Iedereen had de nummers 1 en 2 helemaal goed. In opgave 2 had ik een permutatie genomen die klinkers in klinkers omzet en medeklinkers in medeklinkers. Het effect van zo'n permutatie is dat de tekst meer op een bestaande taal lijkt, en er daardoor wat appetijtelijker uitziet.
Bij opgave 3 trof ik zes onvolledige oplossingen aan.
Voor de volledigheid komen hier de antwoorden.

Opgave 1. De puzzelschat der aarde is oud, rijk en onuitputtelijk. Zij wordt jaar in, jaar uit aangevuld en, meer nog, voortdurend gevarieerd.

Opgave 2. Gegeven is een driehoek die in twee gelijkbenige driehoeken kan worden verdeeld. Welke waarden kan de kleinste hoek aannemen?

Opgave 3. Er zijn vijf mogelijkheden: 10, 25, $26^2/_3$, $33^1/_3$ en 40 graden.

Het was voor twee inzenders niet geheel duidelijk dat 'de kleinste hoek' bedoeld is als de kleinste hoek van de hele driehoek. Ik hoop maar dat deze onduidelijkheid voor niemand aanleiding is geweest om helemaal niets in te sturen!

Ladderstand
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
L. de Rooij 492
G. Riphagen 434
L. van den Raadt 342
H. Klein 332
W. Doyer 316
N. Wensink 228
T. Kool 226
K. Verhoeven 207
J. Hanenberg 199
H. Bakker 158
F. van Lamoen 154
H. Linders 152
M. Woldinga 134
W. van den Camp 128
H.J. van Weers 123
K. van der Straaten 123

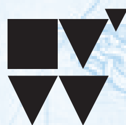
Bij de vorige ladderstand stond Jan Meerhof bovenaan. Derhalve heeft hij nu 20 punten in plaats van 508. Hij krijgt een boekenbon van € 30,00. Gefeliciteerd!

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie *www.wiskundeonderwijs.nl*

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen

Zie verder ook *www.nvvw.nl/zebrareeks.html* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Wisforta – wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	10 feb 2009	16 dec 2008
5	24 maart 2009	3 feb 2009
6	21 april 2009	3 maart 2009
7	2 juni 2009	7 april 2009
8	7 juli 2009	19 mei 2009

2009

zaterdag 10 januari, Utrecht
Wintersymposium: Wiskunde een Kunst
Organisatie KWG
Zie ook pag. 113 in dit nummer.

donderdag 15 januari, Amsterdam
Mastercourse: De sublieme eenvoud van relativiteit...
Organisatie UvA

wo. 21 t/m vr. 23 januari, Noordwijkerhout
27e Panama Conferentie
Organisatie FIsme

ma. 26 t/m vr. 30 januari, Wageningen
Studiegroep Wiskunde met de Industrie (SWI)
Organisatie KWG

vrijdag 30 januari, op de scholen
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade 2009
Organisatie Stichting NWO
Zie pag. 113 in dit nummer.

vr. 6 en za. 7 februari, Noordwijkerhout
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme

do. 12 en vr. 13 maart, Noordwijkerhout
Nationale Rekendagen
Organisatie FIsme

dinsdag 17 februari, Amsterdam
Mastercourse: Spelen tegen het toeval
Organisatie UvA

dinsdag 24 februari, Amsterdam
Mastercourse: Golven als dynamische systemen
Organisatie UvA

dinsdag 17 maart, Amsterdam
Mastercourse: Forensische statistiek
Organisatie UvA

vrijdag 20 maart, op de scholen
Kangoeroe wedstrijd
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe